

Corrigé et barème – Vecteurs, géométrie dans le plan repéré et équations de droites — niveau ★

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 2^{nde}

Exercice 1 – Automatismes

(5 pts)

- a) $2\vec{u}\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$, donc $\vec{w}\begin{pmatrix} 6-(-2) \\ -2-4 \end{pmatrix}$, soit $\vec{w}\begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix}$. (1 pt) (1)
- b) $\|\vec{w}\| = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$. (1 pt) (1)
- c) $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 3 \times 4 - (-1) \times (-2) = 12 - 2 = 10 \neq 0$: les vecteurs ne sont pas colinéaires. (1 pt) (1)
- d) $3x - y + 2 = 0 \iff y = 3x + 2$: coefficient directeur 3, ordonnée à l'origine 2. (1 pt) (1)
- e) Pour $ax + by + c = 0$, le vecteur $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ dirige la droite : ici $a = 3$, $b = -1$, d'où $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ (cohérent avec le coefficient directeur 3 : on avance de 1, on monte de 3). (1 pt) (1)

Méthode — Un vecteur directeur $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ se lit directement sur l'équation réduite $y = mx + p$: c'est le lien le plus rapide entre vecteurs et droites.

Exercice 2 – Un quadrilatère dans le repère

(5 pts)

- a) $I\left(\frac{-1+5}{2}; \frac{2+0}{2}\right)$, soit $I(2; 1)$. (1 pt) (1)
- b) $\vec{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$: $AB = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$; $\vec{BC}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$: $BC = \sqrt{4 + 16} = 2\sqrt{5}$; $\vec{AC}\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$: $AC = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$. (1 pt) (1)
- c) $AB^2 + BC^2 = 20 + 20 = 40 = AC^2$: d'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABC est rectangle en B ; comme $AB = BC$, il est aussi isocèle en B . (1 pt) (1)
- d) I est le milieu de $[BD]$: $x_D = 2x_I - x_B = 4 - 3 = 1$ et $y_D = 2y_I - y_B = 2 - 4 = -2$, donc $D(1; -2)$. (1 pt) (1)
- e) Les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu I : $ABCD$ est un parallélogramme. Il a un angle droit en B : c'est un rectangle. Deux côtés consécutifs sont égaux ($AB = BC$) : c'est un carré. (1 pt) (1)

Piège — Pour conclure « carré », il faut trois étapes : parallélogramme, puis angle droit, puis deux côtés consécutifs égaux ; oublier l'une d'elles rend la justification incomplète.

Exercice 3 – Une droite, deux méthodes

(5 pts)

- a) $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4 - 1}{4 - (-2)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. (1 pt) (1)
- b) $y = \frac{1}{2}x + p$ et $A \in (AB) : 1 = \frac{1}{2} \times (-2) + p$, donc $p = 2$. Équation : $y = \frac{1}{2}x + 2$ (vérification avec $B : 2 + 2 = 4$). (1 pt) (1)
- c) $\vec{AM} \begin{pmatrix} x+2 \\ y-1 \end{pmatrix}$ et $\vec{AB} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\det(\vec{AM}, \vec{AB}) = 3(x+2) - 6(y-1) = 3x - 6y + 12$. Donc $M \in (AB) \iff 3x - 6y + 12 = 0 \iff x - 2y + 4 = 0$, équivalente à $y = \frac{1}{2}x + 2$. (1 pt) (1)
- d) Pour $E : \frac{1}{2} \times (-8) + 2 = -2 = y_E$, donc $E \in (AB)$. Pour $F : \frac{1}{2} \times 6 + 2 = 5 \neq 6$, donc $F \notin (AB)$. (1 pt) (1)
- e) Des droites parallèles ont le même coefficient directeur : $d' : y = \frac{1}{2}x + p'$ et K donne $p' = -3$, soit $y = \frac{1}{2}x - 3$. (1 pt) (1)

Astuce — La condition $\det(\vec{AM}, \vec{AB}) = 0$ fournit directement une équation cartésienne, sans calculer d'abord le coefficient directeur : pratique quand la droite est verticale.

Exercice 4 – Problème — Deux tarifs de concert

(5 pts)

- a) $\begin{cases} 3x + 2y = 64 \\ 2x + 5y = 72 \end{cases}$ (1 pt) (1)
- b) $3x + 2y - 64 = 0$ est dirigée par $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $2x + 5y - 72 = 0$ par $\vec{v} \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$. $\det(\vec{u}, \vec{v}) = (-2) \times 2 - 3 \times (-5) = -4 + 15 = 11 \neq 0$: les droites sont sécantes, le système a une unique solution. (1 pt) (1)
- c) On multiplie la 1re équation par 5 et la 2e par 2 : $15x + 10y = 320$ et $4x + 10y = 144$. Par soustraction, $11x = 176$, donc $x = 16$. Puis $2y = 64 - 48 = 16$, donc $y = 8$. Vérification : $2 \times 16 + 5 \times 8 = 72$. Place adulte 16 €, place enfant 8 €. (1 pt) (1)
- d) $4 \times 16 + 3 \times 8 = 64 + 24 = 88$: le groupe paie 88 €. (1 pt) (1)
- e) Le couple (16 ; 8) est le point d'intersection des droites d'équations $3x + 2y = 64$ et $2x + 5y = 72$. (1 pt) (1)

Erreur fréquente — Après avoir trouvé x , on oublie souvent de vérifier la solution dans l'équation qui n'a pas servi : c'est pourtant le contrôle le plus sûr.