

## Devoir surveillé – Statistiques, probabilités et échantillonnage — niveau ★★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 2<sup>nde</sup>

Nom : \_\_\_\_\_

Date : \_\_\_\_\_

Note : \_\_\_\_\_ / 20

*Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.*

---

### Exercice 1 – Calculs rapides

(3 pts)

- a) On donne  $P(A) = 0,7$ ,  $P(B) = 0,5$  et  $P(A \cup B) = 0,85$ . Calculer  $P(A \cap B)$ , puis  $P(A \cap \overline{B})$ .
- b) Une série  $(x_i)$  a pour moyenne 8 et pour écart type 3. Déterminer les réels  $a > 0$  et  $b$  tels que la série des  $ax_i + b$  ait pour moyenne 50 et pour écart type 12.
- c) Déterminer le plus petit entier  $n$  pour lequel l'intervalle  $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$  a une amplitude inférieure ou égale à 0,05.

### Exercice 2 – Démontrer

(4 pts)

- a) On considère une série de  $N$  valeurs  $x_1, \dots, x_N$  de moyenne  $\bar{x}$ , et les nombres  $y_i = ax_i + b$ . Démontrer que  $\bar{y} = a\bar{x} + b$ .
- b) On répète  $N$  fois une expérience et on note  $x_i = 1$  en cas de succès,  $x_i = 0$  sinon. On obtient  $k$  succès et on pose  $f = \frac{k}{N}$ . Démontrer que la moyenne de la série des  $x_i$  vaut  $f$  et que sa variance vaut  $V = f(1 - f)$ .
- c) Démontrer que, pour tout réel  $f$ ,  $f(1 - f) = \frac{1}{4} - \left(f - \frac{1}{2}\right)^2$ . En déduire que l'écart type d'une telle série ne dépasse jamais  $\frac{1}{2}$ , et préciser dans quel cas il vaut  $\frac{1}{2}$ .
- d) Application : dans un jeu, chaque partie gagnée rapporte 5 euros et chaque partie perdue coûte 2 euros. Un joueur gagne 120 parties sur 400. Exprimer le gain  $g_i$  de la partie  $i$  en fonction de  $x_i$ , puis calculer le gain moyen par partie et l'écart type des gains, au centième (on admet que l'écart type de la série des  $ax_i + b$  vaut  $|a|$  fois celui des  $x_i$ ).
- e) La probabilité de gagner une partie est  $p = \frac{2}{7}$ . Que peut-on prévoir pour le gain moyen par partie sur un très grand nombre de parties ? Justifier.

**Exercice 3 – Filles, garçons et association sportive***(4 pts)*

- a) Dans un lycée, 55 % des élèves sont des filles ( $F$ ) et les autres des garçons ( $G$ ). 40 % des élèves sont inscrits à l'association sportive ( $A$ ) et, parmi les filles, 30 % y sont inscrites. On choisit un élève au hasard. Représenter la situation par un arbre pondéré (certaines branches seront complétées plus tard) et calculer  $P(F \cap A)$ .
- b) Calculer la probabilité qu'un garçon soit inscrit à l'association,  $P_G(A)$  (valeur exacte, puis arrondi à  $10^{-3}$ ).
- c) On choisit au hasard un élève inscrit à l'association. Calculer la probabilité que ce soit une fille.
- d) On constate ici que  $\$P\_F(A)$
- e) Le lycée compte 1 600 élèves. Au niveau national, la proportion de lycéens inscrits à une association sportive est  $p = 0,36$ . En considérant les élèves du lycée comme un échantillon, la proportion observée dans ce lycée est-elle compatible avec  $p$  ?

**Exercice 4 – Problème — Contrôle de pots de yaourt***(4 pts)*

- a) Une machine remplit des pots de yaourt. On a pesé 200 pots (masse en grammes) :

| Masse (g) | [118 ; 122[ | [122 ; 124[ | [124 ; 126[ | [126 ; 128[ | [128 ; 132[ |
|-----------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| Effectif  | 16          | 44          | 70          | 50          | 20          |

Calculer une valeur approchée de la masse moyenne  $\bar{x}$  en utilisant les centres des classes.

- b) On pose  $d = c - 125$ , où  $c$  est le centre d'une classe. Calculer la moyenne et la variance de la série des  $d$  (pondérée par les effectifs), puis en déduire une valeur approchée de l'écart type des masses, au centième. Justifier l'intérêt de ce changement de variable.
- c) Estimer la médiane de la série par interpolation linéaire, au centième.
- d) Un pot est conforme si sa masse appartient à  $[122 ; 128[$ . On choisit un pot au hasard parmi les 200. Calculer la probabilité qu'il soit conforme, puis la probabilité qu'il pèse au moins 124 g sachant qu'il est conforme (arrondi à  $10^{-3}$ ).
- e) Pour un rapport, on retire les 5 g d'emballage de chaque pot et on exprime la masse de yaourt en kilogrammes. Donner la moyenne et l'écart type de la nouvelle série, sans refaire de tableau.

**Exercice 5 – Pour aller plus loin — Au moins un six***(5 pts)*

- a) On lance deux dés équilibrés à six faces. En raisonnant sur l'événement contraire, montrer que la probabilité  $p$  d'obtenir au moins un 6 vaut  $\frac{11}{36}$ .
- b) Écrire en Python une fonction `essai()` qui simule le lancer des deux dés et renvoie `True` si l'on obtient au moins un 6, `False` sinon, puis une fonction `frequence(n)` qui renvoie la fréquence des succès sur  $n$  essais.
- c) Écrire une fonction `proportion(N, n)` qui simule  $N$  échantillons de taille  $n$  et renvoie la proportion de ces échantillons dont la fréquence  $f$  vérifie  $|f - p| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ .
- d) L'appel `proportion(1000, 400)` renvoie `0.958`. Interpréter ce résultat.
- e) Un joueur soupçonne que les dés sont truqués et que la vraie probabilité d'obtenir au moins un 6 est  $\frac{1}{3}$ . Déterminer la plus petite taille  $n$  d'échantillon pour laquelle une fréquence observée égale à  $\frac{1}{3}$  serait strictement en dehors de l'intervalle  $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ , avec  $p = \frac{11}{36}$ .
- f) Généraliser : pour une probabilité  $p$  et une fréquence  $q \neq p$ , donner une condition nécessaire et suffisante sur  $n$  pour que  $q$  soit en dehors de l'intervalle. Que devient la taille nécessaire si l'écart  $|q - p|$  est divisé par 2 ?

*Bon courage !*

---

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).