

Corrigé et barème – Statistiques, probabilités et échantillonnage — niveau ★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 2^{nde}

Exercice 1 – Automatismes

(3 pts)

- a) Incompatibles : $P(A \cap B) = 0$, donc $P(A \cup B) = 0,45 + 0,3 = 0,75$. (0,5 pt) (0,75)
- b) Nouvelle moyenne : $3 \times 12 - 5 = 31$; nouvel écart type : $3 \times 2 = 6$ (retrancher 5 ne modifie pas la dispersion). (1 pt) (0,75)
- c) $\frac{1}{\sqrt{n}} \leq 0,04 \iff \sqrt{n} \geq \frac{1}{0,04} = 25 \iff n \geq 625$: le plus petit entier est $n = 625$. (1 pt) (0,75)
- d) Série rangée : 2 ; 4 ; 5 ; 7 ; 8 ; 9 ; 11. Effectif impair 7 : la médiane est la 4^e valeur, $Me = 7$; étendue : $11 - 2 = 9$. (0,5 pt) (0,75)

Erreur fréquente — Une translation (ajouter ou retrancher un nombre) ne change pas l'écart type ; seule la multiplication par a le multiplie par $|a|$.

Exercice 2 – Temps de trajet

(5 pts)

- a) Effectifs cumulés : 24 ; 72 ; 128 ; 148 ; 160. Fréquences cumulées : $\frac{24}{160} = 0,15$; $\frac{72}{160} = 0,45$; $\frac{128}{160} = 0,8$; $\frac{148}{160} = 0,925$; 1. (1 pt) (1)
- b) Centres des classes : 5 ; 15 ; 25 ; 37,5 ; 52,5. $\bar{x} \approx \frac{24 \times 5 + 48 \times 15 + 56 \times 25 + 20 \times 37,5 + 12 \times 52,5}{160} = \frac{120 + 720 + 1400 + 750 + 630}{160} = \frac{3620}{160} = 22,625$, soit environ 22,6 min. C'est une approximation car on remplace chaque durée par le centre de sa classe. (1 pt) (1)
- c) La fréquence cumulée passe de 0,45 à 0,8 sur $[20 ; 30[$: c'est la classe médiane. $Me \approx 20 + 10 \times \frac{0,8 - 0,45}{0,8 - 0,45} = 20 + \frac{0,5}{0,35} \approx 21,43$ min. (1 pt) (1)
- d) $\frac{24}{10} = 2,4$; $\frac{48}{10} = 4,8$; $\frac{56}{10} = 5,6$; $\frac{20}{15} \approx 1,33$; $\frac{12}{15} = 0,8$. Les hauteurs des rectangles sont proportionnelles à ces nombres : le plus haut est celui de $[20 ; 30[$. On remarque que $[30 ; 45[$, d'effectif 20 proche de celui de $[0 ; 10[$, a un rectangle presque deux fois moins haut, car il est plus large. (1 pt) (1)
- e) $P(T \geq 30) = \frac{20 + 12}{160} = \frac{32}{160} = 0,2$. Les élèves dont le trajet dure au moins 20 min sont $56 + 20 + 12 = 88$, dont 32 mettent au moins 30 min : la probabilité cherchée est $\frac{32}{88} = \frac{4}{11} \approx 0,364$. (1 pt) (1)

Piège — Avec des classes d'amplitudes différentes, la hauteur d'un rectangle d'histogramme n'est pas l'effectif : c'est l'aire du rectangle qui lui est proportionnelle.

Exercice 3 – Problème — Pièces défectueuses

(4 pts)

- a) Arbre : M_1 (0,7) puis D (0,02) et $\bar{D}$ (0,98) ; M_2 (0,3) puis D (0,05) et $\bar{D}$ (0,95). $P(M_1 \cap D) = 0,7 \times 0,02 = 0,014$. (1 pt) (1)
- b) Probabilités totales : $P(D) = P(M_1 \cap D) + P(M_2 \cap D) = 0,014 + 0,3 \times 0,05 = 0,014 + 0,015 = 0,029$. (1 pt) (1)
- c) $P_D(M_2) = \frac{P(M_2 \cap D)}{P(D)} = \frac{0,015}{0,029} = \frac{15}{29} \approx 0,517$. M_2 ne produit que 30 % des pièces mais fournit plus de la moitié des pièces défectueuses, car son taux de défaut est 2,5 fois plus élevé que celui de M_1 . (1 pt) (1)
- d) $f = \frac{130}{2\,500} = 0,052$; $\frac{1}{\sqrt{2\,500}} = \frac{1}{50} = 0,02$; intervalle : $[0,029 - 0,02 ; 0,029 + 0,02] = [0,009 ; 0,049]$. Comme $0,052 > 0,049$, la fréquence est hors de l'intervalle. Or, pour des échantillons de cette taille, environ 95 % au moins ont une fréquence dans l'intervalle : on peut suspecter un dérèglement de la production, avec un faible risque de se tromper. (1 pt) (1)

Méthode — Pour inverser un conditionnement, on écrit $P_D(M_2) = \frac{P(M_2 \cap D)}{P(D)}$: le numérateur se lit sur une branche de l'arbre, le dénominateur vient des probabilités totales.

Exercice 4 – Qui a raison ?

(4 pts)

- a) Non. Ajouter 2 à chaque valeur décale toute la série (la moyenne augmente aussi de 2) sans modifier les écarts à la moyenne : l'écart type est inchangé. Exemple : les séries 1 ; 3 et 3 ; 5 ont toutes deux un écart type égal à 1. (1 pt) (1)
- b) Oui. $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$ et $P(A \cup B) \leq 1$, donc $P(A \cap B) \geq 0,6 + 0,5 - 1 = 0,1 > 0$: A et B ne sont pas incompatibles. (1 pt) (1)
- c) Non, sur les deux points. Le nombre de piles sur 10 lancers fluctue (on peut obtenir 3, 6, ...) ; la loi des grands nombres concerne la fréquence sur un grand nombre de lancers, pas un résultat exact sur 10 lancers. De plus, la pièce n'a pas de mémoire : au lancer suivant, la probabilité d'obtenir face reste 0,5. (1 pt) (1)
- d) Non. Contre-exemple : 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 100. Q_1 est la 2e valeur ($\frac{5}{4} = 1,25$, arrondi à 2) et Q_3 la 4e ($\frac{15}{4} = 3,75$, arrondi à 4) : $Q_1 = Q_3 = 1$, alors que $\bar{x} = \frac{104}{5} = 20,8$. Une valeur extrême peut tirer la moyenne hors de $[Q_1 ; Q_3]$. (1 pt) (1)

Astuce — Pour réfuter une affirmation générale, un seul contre-exemple suffit ; pour la prouver, il faut un argument valable dans tous les cas.

Exercice 5 – Problème — Le jeu du forain*(4 pts)*

- a) Les 36 couples $(d_1; d_2)$ sont équiprobables. Somme au moins égale à 10 : (4 ; 6), (5 ; 5), (6 ; 4), (5 ; 6), (6 ; 5), (6 ; 6), soit 6 issues : $p = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. (1 pt) (1)
- b) Issues sans aucun 6 : $5 \times 5 = 25$, donc, par l'événement contraire, $P(S) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$. Parmi ces 11 issues, les gagnantes sont (4 ; 6), (6 ; 4), (5 ; 6), (6 ; 5), (6 ; 6) : $P_S(G) = \frac{5}{11} \approx 0,455$. (1 pt) (1)
- c) `randint(1, 6)` simule un dé ; `partie()` renvoie `True` si la somme des deux dés vaut au moins 10 (partie gagnée), `False` sinon. `frequence(1000)` simule 1 000 parties et renvoie la fréquence des parties gagnées, qui devrait être proche de $\frac{1}{6} \approx 0,167$. (1 pt) (1)
- d) $f = \frac{131}{1\,000} = 0,131$; $\frac{1}{\sqrt{1\,000}} \approx 0,0316$; intervalle $\left[\frac{1}{6} - \frac{1}{\sqrt{1\,000}} ; \frac{1}{6} + \frac{1}{\sqrt{1\,000}} \right] \approx [0,1350 ; 0,1983]$ (calcul fait avec les valeurs non arrondies). Comme $0,131 < 0,1350$, la fréquence est hors de l'intervalle, ce qui n'arrive que pour environ 5 % des échantillons au plus avec des dés équilibrés : le soupçon est fondé, sans être une certitude. (1 pt) (1)

Erreur fréquente — Les sommes de deux dés ne sont pas équiprobables : on raisonne sur les 36 couples $(d_1; d_2)$, et non sur les 11 sommes possibles de 2 à 12.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).