

Corrigé et barème – Statistiques, probabilités et échantillonnage — niveau ★

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 2^{nde}

Exercice 1 – Automatismes

(4 pts)

- a) $\bar{x} = \frac{12 + 15 + 9 + 18 + 16 + 14}{6} = \frac{84}{6} = 14$. (1 pt) (1)
- b) Série rangée : 9 ; 12 ; 14 ; 15 ; 16 ; 18. L'effectif 6 est pair : la médiane est la moyenne des 3e et 4e valeurs, $\frac{14 + 15}{2} = 14,5$. (1 pt) (1)
- c) $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,3 = 0,7$. (1 pt) (1)
- d) $\sqrt{400} = 20$, donc $\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{20} = 0,05$. (1 pt) (1)

Erreur fréquente — La médiane se lit sur la série rangée dans l'ordre croissant : prendre les valeurs du milieu dans l'ordre de l'énoncé donne un résultat faux.

Exercice 2 – Notes d'un contrôle

(5 pts)

- a) $\bar{x} = \frac{3 \times 8 + 5 \times 10 + 6 \times 12 + 4 \times 14 + 2 \times 16}{20} = \frac{24 + 50 + 72 + 56 + 32}{20} = \frac{234}{20} = 11,7$. (1 pt) (1,25)
- b) Effectifs cumulés croissants : 3 ; 8 ; 14 ; 18 ; 20. Médiane : effectif pair, moyenne des 10e et 11e valeurs, qui valent toutes deux 12 (les rangs 9 à 14 correspondent à la note 12), donc $Me = 12$. $Q_1 : \frac{20}{4} = 5$, c'est la 5e valeur, $Q_1 = 10$. $Q_3 : \frac{3 \times 20}{4} = 15$, c'est la 15e valeur (rangs 15 à 18 : note 14), $Q_3 = 14$. (0,5 pt par indicateur, soit 1,5 pt) (1,25)
- c) Moyenne des carrés : $\frac{3 \times 8^2 + 5 \times 10^2 + 6 \times 12^2 + 4 \times 14^2 + 2 \times 16^2}{20} = \frac{192 + 500 + 864 + 784 + 512}{20} = \frac{2852}{20} = 142,6$. Variance : $V = 142,6 - 11,7^2 = 142,6 - 136,89 = 5,71$ (résultat identique à la calculatrice), donc $\sigma = \sqrt{5,71} \approx 2,39$. Écart interquartile : $Q_3 - Q_1 = 14 - 10 = 4$. (1 pt pour σ , 0,5 pt pour l'écart interquartile) (1,25)
- d) Toutes les notes augmentent de 1 : la moyenne augmente de 1 et devient 12,7. Les écarts entre les notes ne changent pas : l'écart type reste $\sigma \approx 2,39$ et l'écart interquartile reste 4 (Q_1 et Q_3 augmentent tous deux de 1). (1 pt) (1,25)

Méthode — Pour un quartile, on calcule d'abord le rang ($\frac{N}{4}$ ou $\frac{3N}{4}$, arrondi à l'entier supérieur s'il n'est pas entier), puis on le repère dans les effectifs cumulés.

Exercice 3 – Le club sportif du lycée**(6 pts)**

- a) $P(S) = \frac{100}{200} = 0,5$. (1 pt) (1,2)
- b) $P(D \cap S) = \frac{72}{200} = 0,36$: c'est la probabilité que l'élève soit demi-pensionnaire et pratique un sport en club. (1 pt) (1,2)
- c) Formule : $P(D \cup S) = P(D) + P(S) - P(D \cap S) = 0,6 + 0,5 - 0,36 = 0,74$. Comptage : les 120 demi-pensionnaires et les 28 externes sportifs, soit 148 élèves, et $\frac{148}{200} = 0,74$. (1,5 pt) (1,2)
- d) On se restreint aux 120 demi-pensionnaires, dont 72 sont sportifs : $P_D(S) = \frac{72}{120} = 0,6$. (1 pt) (1,2)
- e) $\frac{1}{\sqrt{200}} \approx 0,0707$. Intervalle : $[0,45 - 0,0707 ; 0,45 + 0,0707] = [0,3793 ; 0,5207]$. La fréquence observée $f = 0,5$ appartient à cet intervalle : elle est compatible avec $p = 0,45$, l'écart s'expliquant par la fluctuation d'échantillonnage. (1,5 pt) (1,2)

Piège — « Et » correspond à l'intersection, « ou » à la réunion : dans $D \cup S$, les élèves à la fois demi-pensionnaires et sportifs ne doivent être comptés qu'une seule fois.

Exercice 4 – Carte de fidélité et simulation**(5 pts)**

- a) Arbre : C (0,4) puis F (0,3) et $\overline{F}$ (0,7) ; $\overline{C}$ (0,6) puis F (0,1) et $\overline{F}$ (0,9). $P(C \cap F) = 0,4 \times 0,3 = 0,12$. (1 pt) (1)
- b) On additionne les deux chemins qui mènent à F (probabilités totales) : $P(F) = 0,4 \times 0,3 + 0,6 \times 0,1 = 0,12 + 0,06 = 0,18$. (1 pt) (1)
- c) `random()` renvoie un nombre au hasard dans $[0 ; 1[$: le test `random() < 0.4` est vrai avec la probabilité 0,4 et simule « le client paie par carte ». Selon le cas, on simule ensuite F avec la probabilité 0,3 ou 0,1. La fonction renvoie `True` si le client simulé possède la carte de fidélité (probabilité 0,18), `False` sinon. (1 pt) (1)
- d) $f = \frac{1812}{10000} = 0,1812$. D'après la loi des grands nombres, quand on répète un grand nombre de fois l'expérience, la fréquence d'un événement se rapproche de sa probabilité, ici 0,18. (1 pt) (1)
- e) $\sqrt{10000} = 100$, donc $\frac{1}{\sqrt{n}} = 0,01$; l'intervalle est $[0,17 ; 0,19]$ et $0,17 \leq 0,1812 \leq 0,19$: la fréquence appartient bien à l'intervalle. (1 pt) (1)

Astuce — Dans un arbre pondéré, les probabilités issues d'un même nœud ont pour somme 1 : on obtient ainsi immédiatement 0,6, 0,7 et 0,9.