Devoir surveillé – Nombres réels, arithmétique et logique — niveau ★★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 2nde

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Démontrer — $\sqrt{5}$ et le nombre d'or *(4 pts)*

On admet que le carré de tout entier impair s'écrit $8m+1$ avec m entier, et que si le carré d'un entier est pair, alors cet entier est pair.

a) Soit a et b deux entiers impairs. Démontrer que $a^2 - 5b^2$ n'est pas un multiple de 8.

b) Démontrer par l'absurde que $\sqrt{5}$ est irrationnel.

c) On pose $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Vérifier que $\varphi^2 = \varphi + 1$, puis démontrer que φ est irrationnel.

d) Pour un réel x, on considère l'implication (I) : « si x^2 est irrationnel, alors x est irrationnel ». Énoncer sa contraposée et la démontrer. Énoncer la réciproque de (I) et montrer qu'elle est fausse.

Exercice 2 – Autour de 7/15 *(4 pts)*

a) Démontrer par l'absurde que $\dfrac{7}{15}$ n'est pas un nombre décimal.

b) On pose $x = 0{,}4666\ldots$ (le chiffre 6 se répète indéfiniment). Calculer $100x - 10x$ et en déduire que $x = \dfrac{7}{15}$.

c) Donner l'encadrement de $\dfrac{7}{15}$ à 10^{-3} près par deux décimaux consécutifs, puis calculer exactement l'écart entre $\dfrac{7}{15}$ et chacune des deux bornes. En déduire l'arrondi de $\dfrac{7}{15}$ au millième.

d) Vrai ou faux : « la somme de deux nombres qui ne sont pas décimaux n'est jamais un nombre décimal » ? On pourra utiliser $\dfrac{1}{30}$.

Exercice 3 – Sommes de deux carrés *(4 pts)*

On rappelle (exercice 1) que le carré de tout entier impair s'écrit $8m+1$.

a) Démontrer que, si un entier N est la somme des carrés de deux entiers impairs, alors $N - 2$ est un multiple de 8.

b) Les entiers 2 026 et 2 030 sont-ils chacun la somme des carrés de deux entiers impairs ?

c) La réciproque de a) est-elle vraie ? On pourra étudier $N = 42$.

d) Démontrer que le carré d'un entier pair s'écrit $8m$ ou $8m+4$ (m entier). En déduire qu'aucun entier de la forme $8k+7$ (k entier), comme 2 023, n'est la somme des carrés de deux entiers.

Exercice 4 – Problème — Trois capteurs *(4 pts)*

Trois capteurs mesurent la même longueur L (en cm). Le capteur 1 garantit $|L - 12{,}4| \leqslant 0{,}3$, le capteur 2 garantit $|L - 12{,}9| \leqslant 0{,}4$ et le capteur 3 garantit $|L - 13{,}1| \leqslant 0{,}3$. Un capteur est fiable lorsque sa garantie est vraie.

a) Traduire chaque garantie par un intervalle, noté I_1, I_2 et I_3.

b) On suppose les capteurs 1 et 2 fiables. Déterminer l'ensemble des valeurs possibles de L, puis l'écrire sous la forme $|L - c| \leqslant \rho$.

c) Démontrer que les trois capteurs ne peuvent pas être tous fiables. Sachant qu'un seul capteur est défaillant, peut-on savoir lequel ?

d) Soit a et b deux réels avec $a \leqslant b$, et r, s deux réels strictement positifs. Démontrer que, si les intervalles $[a - r\,;a + r]$ et $[b - s\,;b + s]$ ont un point commun, alors $b - a \leqslant r + s$. Énoncer la contraposée et l'appliquer aux capteurs 1 et 3.

Exercice 5 – Pour aller plus loin — Carrés et multiples de 3 *(4 pts)*

a) On admet que, parmi trois entiers consécutifs, l'un est un multiple de 3. Soit n un entier. En distinguant le cas où n est un multiple de 3 et le cas contraire, et en utilisant $(n-1)(n+1)$, démontrer que n^2 s'écrit $3m$ ou $3m+1$, avec m entier.

b) Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, le nombre $10^n + 1$ n'est pas le carré d'un entier.

c) On admet que, si un entier naturel N n'est pas le carré d'un entier, alors $\sqrt{N}$ est irrationnel. En déduire que $\sqrt{1\,000\,001}$ est irrationnel, puis que $\sqrt{1\,000\,001} - 1\,000$ n'est pas un nombre décimal.

d) On note E l'ensemble des entiers n tels que $1 \leqslant n \leqslant 60$ qui s'écrivent $3m + 2$ (m entier), et F l'ensemble des entiers n tels que $1 \leqslant n \leqslant 60$ et $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$. Déterminer $\mathrm{Card}(E)$, l'ensemble F, puis $E \cap F$ et $\mathrm{Card}(E \cup F)$.

Bon courage !

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).