Corrigé et barème – Nombres réels, arithmétique et logique — niveau ★★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 2nde

Exercice 1 – Démontrer — $\sqrt{5}$ et le nombre d'or *(4 pts)*

a) $a^2 = 8m+1$ et $b^2 = 8m'+1$ avec m et m' entiers (deux lettres), donc $a^2 - 5b^2 = 8m + 1 - 40m' - 5 = 8(m - 5m') - 4$ (0,5 pt). Si l'on avait $a^2 - 5b^2 = 8K$ avec K entier, alors $8(m - 5m' - K) = 4$, soit $m - 5m' - K = \dfrac{1}{2}$, qui n'est pas un entier : contradiction (0,5 pt). (1)

b) Supposons $\sqrt{5} = \dfrac{a}{b}$, fraction irréductible (a, b entiers naturels, $b \neq 0$) : $a^2 = 5b^2$. Si b était pair, $5b^2$ serait pair, donc a^2 et a aussi : 2 diviserait a et b, ce qui contredit l'irréductibilité. Donc b est impair, $5b^2$ est impair (produit de deux impairs), a^2 aussi, donc a est impair (0,5 pt). D'après a), $a^2 - 5b^2$ n'est pas un multiple de 8 ; or il vaut $0 = 8 \times 0$: contradiction. Donc $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$ (0,5 pt). (1)

c) $\varphi^2 = \dfrac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{4} = \dfrac{6 + 2\sqrt{5}}{4} = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2} = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} + 1 = \varphi + 1$ (0,5 pt). Si φ était un rationnel r, alors $\sqrt{5} = 2r - 1$ serait rationnel (produit et différence de rationnels), ce qui contredit b). Donc φ est irrationnel (0,5 pt). (1)

d) Contraposée : « si x est rationnel, alors x^2 est rationnel ». Elle est vraie : si $x = \dfrac{p}{q}$ avec p, q entiers et $q \neq 0$, alors $x^2 = \dfrac{p^2}{q^2}$ avec p^2, q^2 entiers et $q^2 \neq 0$. Donc (I) est vraie (0,5 pt). Réciproque : « si x est irrationnel, alors x^2 est irrationnel » ; elle est fausse : $\sqrt{5}$ est irrationnel (question b) mais $\left(\sqrt{5}\right)^2 = 5$ est rationnel (0,5 pt). (1)

Piège — Quand $a^2 = 5b^2$ avec a et b impairs, la parité ne suffit plus pour conclure : c'est le calcul modulo 8 (question a) qui donne la contradiction.

Exercice 2 – Autour de 7/15 *(4 pts)*

a) Supposons $\dfrac{7}{15} = \dfrac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors $7 \times 10^n = 15a = 3 \times 5a$: 7×10^n serait un multiple de 3 (0,5 pt). Or 7×10^n s'écrit avec un 7 suivi de n zéros : la somme de ses chiffres vaut 7, qui n'est pas un multiple de 3. Contradiction : $\dfrac{7}{15} \notin \mathbb{D}$ (0,5 pt). (1)

b) $100x = 46{,}666\ldots$ et $10x = 4{,}666\ldots$ ont la même partie décimale : $100x - 10x = 46 - 4 = 42$, soit $90x = 42$ (0,5 pt). Donc $x = \dfrac{42}{90} = \dfrac{7}{15}$ (on simplifie par 6). Cette écriture décimale illimitée et périodique est cohérente avec a) (0,5 pt). (1)

c) D'après b), $0{,}466 < \dfrac{7}{15} < 0{,}467$: encadrement d'amplitude 10^{-3} (0,5 pt). $\dfrac{7}{15} - 0{,}466 = \dfrac{1\,400 - 1\,398}{3\,000} = \dfrac{2}{3\,000} = \dfrac{1}{1\,500}$ et $0{,}467 - \dfrac{7}{15} = \dfrac{1\,401 - 1\,400}{3\,000} = \dfrac{1}{3\,000}$. Comme $\dfrac{1}{3\,000} < \dfrac{1}{1\,500}$, l'arrondi au millième est 0,467, alors que la troncature est 0,466 (0,5 pt). (1)

d) Fausse. $\dfrac{1}{30}$ est irréductible et son dénominateur $30 = 2 \times 3 \times 5$ contient le facteur 3 : il n'est pas décimal (0,5 pt). Or $\dfrac{7}{15} + \dfrac{1}{30} = \dfrac{14 + 1}{30} = \dfrac{15}{30} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$ est décimal : c'est un contre-exemple (0,5 pt). (1)

Astuce — Pour une écriture périodique, on multiplie par deux puissances de 10 qui placent la virgule juste avant le début d'une période : ici $100x$ et $10x$, dont la différence est entière.

Exercice 3 – Sommes de deux carrés *(4 pts)*

a) Soit $N = p^2 + q^2$ avec p et q impairs. D'après le résultat rappelé, $p^2 = 8m + 1$ et $q^2 = 8m' + 1$ avec m et m' entiers (deux lettres). Alors $N - 2 = 8m + 8m' = 8(m + m')$, où $m + m'$ est un entier : $N - 2$ est un multiple de 8. (1 pt) (1)

b) $2\,026 = 2\,025 + 1 = 45^2 + 1^2$, avec 45 et 1 impairs : oui (0,5 pt). $2\,030 - 2 = 2\,028 = 8 \times 253 + 4$ n'est pas un multiple de 8 ; par contraposée de a), 2 030 n'est pas la somme des carrés de deux entiers impairs (0,5 pt). (1)

c) Réciproque : « si $N - 2$ est un multiple de 8, alors N est la somme des carrés de deux entiers impairs ». Pour $N = 42$, $N - 2 = 40 = 8 \times 5$. Les carrés impairs inférieurs à 42 sont 1, 9 et 25, et $42 - 1 = 41$, $42 - 9 = 33$, $42 - 25 = 17$ ne sont pas des carrés : 42 n'est pas la somme de deux carrés impairs. La réciproque est fausse. (1 pt) (1)

d) Soit $n = 2j$: $n^2 = 4j^2$. Si $j = 2i$, $n^2 = 16i^2 = 8 \times 2i^2$; si $j = 2i + 1$, $n^2 = 4(4i^2 + 4i + 1) = 8(2i^2 + 2i) + 4$ (0,5 pt). Tout carré s'écrit donc $8m$, $8m + 1$ ou $8m + 4$. En ajoutant deux tels carrés ($0 + 0$, $0 + 1$, $0 + 4$, $1 + 1$, $1 + 4$, $4 + 4 = 8$), on obtient un entier de la forme $8M + r$ avec $r \in \{0\,;1\,;2\,;4\,;5\}$, jamais $8M' + 7$: l'écart $7 - r$ vaut 7, 6, 5, 3 ou 2, qui n'est pas un multiple de 8. Comme $2\,023 = 8 \times 252 + 7$, 2 023 n'est pas la somme de deux carrés (0,5 pt). (1)

Méthode — Une condition nécessaire (« $N - 2$ multiple de 8 ») sert à éliminer des cas par contraposée ; pour conclure qu'un nombre convient, il faut un exemple explicite, comme $45^2 + 1^2$.

Exercice 4 – Problème — Trois capteurs *(4 pts)*

a) $|L - a| \leqslant r \iff L \in [a - r\,;a + r]$: $I_1 = [12{,}1\,;12{,}7]$, $I_2 = [12{,}5\,;13{,}3]$ et $I_3 = [12{,}8\,;13{,}4]$. (1 pt) (1)

b) $L \in I_1 \cap I_2 = [12{,}5\,;12{,}7]$ (0,5 pt). Centre $\dfrac{12{,}5 + 12{,}7}{2} = 12{,}6$ et rayon $\dfrac{12{,}7 - 12{,}5}{2} = 0{,}1$: $|L - 12{,}6| \leqslant 0{,}1$ (0,5 pt). (1)

c) Par l'absurde : si les trois étaient fiables, L appartiendrait à $I_1 \cap I_3$; or tout réel de I_1 est inférieur ou égal à 12,7 et tout réel de I_3 est supérieur ou égal à 12,8 : $I_1 \cap I_3 = \varnothing$, contradiction (0,5 pt). Pour la même raison, les capteurs 1 et 3 ne sont pas fiables tous les deux : le défaillant est le 1 ou le 3. Si c'est le 3, $L \in I_1 \cap I_2 = [12{,}5\,;12{,}7]$, non vide ; si c'est le 1, $L \in I_2 \cap I_3 = [12{,}8\,;13{,}3]$, non vide. Les deux cas restent possibles : on ne peut pas savoir lequel (0,5 pt). (1)

d) Si x est un point commun, $x \leqslant a + r$ et $x \geqslant b - s$, donc $b - s \leqslant a + r$, soit $b - a \leqslant r + s$ (0,5 pt). Contraposée : « si $b - a > r + s$, alors les deux intervalles n'ont aucun point commun ». Pour les capteurs 1 et 3 : $13{,}1 - 12{,}4 = 0{,}7 > 0{,}3 + 0{,}3 = 0{,}6$, d'où $I_1 \cap I_3 = \varnothing$ sans tracer les intervalles (0,5 pt). (1)

Astuce — Deux garanties « à r près » et « à s près » ne peuvent être vraies ensemble que si les centres sont distants d'au plus $r + s$: un calcul de distance remplace le dessin.

Exercice 5 – Pour aller plus loin — Carrés et multiples de 3 *(4 pts)*

a) Si $n = 3k$, alors $n^2 = 3 \times 3k^2$ s'écrit $3m$ (0,5 pt). Sinon, parmi $n-1$, n, $n+1$, c'est $n-1$ ou $n+1$ qui est un multiple de 3 : $n-1 = 3j$ ou $n+1 = 3j$ avec j entier. Alors $n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$ vaut $3j(n+1)$ ou $3j(n-1)$: c'est un multiple de 3, $n^2 - 1 = 3m$, d'où $n^2 = 3m + 1$ (0,5 pt). (1)

b) $10^n - 1$ s'écrit avec n chiffres 9 : la somme de ses chiffres, $9n$, est un multiple de 3, donc $10^n - 1 = 3q$ avec q entier et $10^n + 1 = 3q + 2$ (0,5 pt). Si $10^n + 1$ était un carré, il s'écrirait $3m$ ou $3m+1$ d'après a). Or $3q + 2 = 3m$ donnerait $2 = 3(m-q)$, et $3q+2 = 3m+1$ donnerait $1 = 3(m-q)$: impossible, car ni 2 ni 1 ne sont des multiples de 3. Donc $10^n + 1$ n'est pas un carré (0,5 pt). (1)

c) $1\,000\,001 = 10^6 + 1$ n'est pas un carré d'après b), donc $\sqrt{1\,000\,001}$ est irrationnel (0,5 pt). Si $\sqrt{1\,000\,001} - 1\,000$ était décimal, il serait rationnel ($\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$) et $\sqrt{1\,000\,001}$, somme de deux rationnels, serait rationnel : contradiction (0,5 pt). (1)

d) $3m + 2$ va de 2 ($m = 0$) à 59 ($m = 19$), donc $\text{Card}(E) = 20$. Si n n'est pas un carré, $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$ (résultat admis) ; si $n = k^2$, $\sqrt{n} = k \in \mathbb{Q}$. Donc $F = \{1\,;4\,;9\,;16\,;25\,;36\,;49\}$ (0,5 pt). D'après a), aucun carré ne s'écrit $3m+2$: $E \cap F = \varnothing$, donc $\text{Card}(E \cup F) = 20 + 7 - 0 = 27$ (0,5 pt). (1)

Erreur fréquente — Vérifier que 11, 101 et 1 001 ne sont pas des carrés ne prouve rien pour tout n : seul l'argument général de la question a) couvre tous les entiers.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).