Devoir surveillé – Nombres réels, arithmétique et logique — niveau ★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 2nde

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Automatismes *(3 pts)*

a) Déterminer le plus grand multiple de 27 inférieur ou égal à 400.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|x + 1{,}5| \leqslant 4$.

c) Écrire la négation de « $-2 \leqslant x < 3$ », puis l'ensemble des réels x qui la vérifient sous forme d'une réunion d'intervalles.

d) Énoncer la contraposée de l'implication « pour tout réel x, si $x^2 > 9$, alors $x > 3$ ». Cette implication est-elle vraie ?

Exercice 2 – Démonstrations du cours *(4 pts)*

a) Démontrer que le carré d'un entier impair est impair.

b) Énoncer la contraposée de ce résultat et justifier qu'elle est vraie.

c) Démontrer par l'absurde que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

d) On pose $A = \sqrt{242} + \sqrt{338} - 30$. Écrire A sous la forme $a\sqrt{2} + b$ avec a et b entiers, puis démontrer que A est irrationnel.

Exercice 3 – Décimal ou pas ? *(4 pts)*

a) Démontrer que $\dfrac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

b) Écrire $\dfrac{126}{150}$ et $\dfrac{70}{132}$ sous forme irréductible, puis dire si chacun de ces nombres est décimal.

c) Tom affirme : « si le dénominateur d'une fraction est un multiple de 3, alors cette fraction n'est pas un nombre décimal ». Montrer qu'il a tort.

d) En utilisant a), démontrer par l'absurde que $\dfrac{4}{3}$ n'est pas décimal.

Exercice 4 – Qui a raison ? *(4 pts)*

a) Léo : « pour tout réel x, si $x \in [-1\,;4]$, alors $x^2 \in [1\,;16]$ ». Que penser de cette implication et de sa réciproque ?

b) Maé : « pour tous entiers a et b, si $a + b$ est pair, alors a et b sont pairs ». A-t-elle raison ? Que dire de la réciproque ?

c) Sami : « il existe un entier n tel que $6n + 4$ est un multiple de 6 ». Démontrer par l'absurde qu'il a tort.

d) Lou : « pour tout réel x, si $|x - 0{,}5| \leqslant 2$, alors $|x| \leqslant 3$ ». Démontrer cette implication. Sa réciproque est-elle vraie ?

Exercice 5 – Problème — Des boîtes de chocolats *(5 pts)*

Un chocolatier vend uniquement des boîtes de 6 et des boîtes de 15 chocolats. Une commande de a boîtes de 6 et de b boîtes de 15 (a et b entiers naturels) contient $N = 6a + 15b$ chocolats.

a) Démontrer que N est toujours un multiple de 3.

b) Un client veut exactement 100 chocolats. Est-ce possible ? Justifier à l'aide d'une contraposée.

c) Un autre client veut exactement 99 chocolats. Déterminer l'ensemble E des couples $(a\,;b)$ qui conviennent et donner $\text{Card}(E)$.

d) On considère la fonction Python ci-dessous.

```
def possible(N):
    b = 0
    while 15 * b <= N:
        if (N - 15 * b) % 6 == 0:
            return True
        b = b + 1
    return False
```

Expliquer ce qu'elle teste, puis donner, en détaillant les étapes, ce que renvoient `possible(57)` et `possible(9)`.

e) La réciproque de a) est-elle vraie ? Démontrer que toute quantité N multiple de 3 et supérieure ou égale à 12 peut être commandée.

Bon courage !

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).