Corrigé et barème – Nombres réels, arithmétique et logique — niveau ★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 2nde

Exercice 1 – Automatismes *(3 pts)*

a) $27 \times 14 = 378$ et $27 \times 15 = 405 > 400$, soit $400 = 27 \times 14 + 22$ avec $0 \leqslant 22 < 27$: le plus grand multiple cherché est 378. (0,5 pt) (0,75)

b) $|x + 1{,}5| = |x - (-1{,}5)|$ est la distance de x à $-1{,}5$. Elle est au plus 4 : $-1{,}5 - 4 \leqslant x \leqslant -1{,}5 + 4$, soit $\mathcal{S} = [-5{,}5\,;2{,}5]$. (1 pt) (0,75)

c) « $x \geqslant -2$ et $x < 3$ » a pour négation « $x < -2$ ou $x \geqslant 3$ », soit $x \in]-\infty\,;-2[\cup [3\,;+\infty[$: c'est le complémentaire de $[-2\,;3[$. (0,5 pt) (0,75)

d) Contraposée : « pour tout réel x, si $x \leqslant 3$, alors $x^2 \leqslant 9$ » (0,5 pt). L'implication est fausse : pour $x = -4$, $x^2 = 16 > 9$ mais $-4 \leqslant 3$. Le même $x = -4$ met en défaut la contraposée, ce qui est normal : elles ont toujours la même vérité (0,5 pt). (0,75)

Piège — $|x + 1{,}5|$ mesure la distance à $-1{,}5$, et non à $1{,}5$: on réécrit toujours $x + a$ sous la forme $x - (-a)$ avant de lire le centre.

Exercice 2 – Démonstrations du cours *(4 pts)*

a) Soit n un entier impair : $n = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Alors $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$, et $m = 2k^2 + 2k$ est un entier : $n^2 = 2m + 1$ est impair. (1 pt) (1)

b) Le résultat s'écrit « si n est impair, alors n^2 est impair ». Sa contraposée est « si n^2 n'est pas impair, alors n n'est pas impair », c'est-à-dire « si n^2 est pair, alors n est pair » (0,5 pt). Elle est vraie, comme l'implication démontrée en a) (0,5 pt). (1)

c) Supposons $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$ avec a et b entiers naturels, $b \neq 0$, la fraction étant irréductible. Alors $a^2 = 2b^2$: a^2 est pair, donc a est pair d'après b) ; avec $a = 2k$, on obtient $4k^2 = 2b^2$, soit $b^2 = 2k^2$: b^2 est pair, donc b est pair (0,5 pt). Ainsi 2 divise a et b, ce qui contredit l'irréductibilité de la fraction. Donc $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (0,5 pt). (1)

d) $\sqrt{242} = \sqrt{121 \times 2} = 11\sqrt{2}$ et $\sqrt{338} = \sqrt{169 \times 2} = 13\sqrt{2}$, donc $A = 24\sqrt{2} - 30$ (0,5 pt). Si A était un rationnel q, alors $\sqrt{2} = \dfrac{q + 30}{24}$ serait rationnel (somme et quotient de rationnels), ce qui contredit c). Donc A est irrationnel (0,5 pt). (1)

Méthode — Pour montrer qu'un nombre est irrationnel, on le suppose rationnel et on isole $\sqrt{2}$: la contradiction vient de l'irrationalité de $\sqrt{2}$, déjà démontrée.

Exercice 3 – Décimal ou pas ? *(4 pts)*

a) Par l'absurde : si $\dfrac{1}{3} = \dfrac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$, alors $10^n = 3a$: 10^n serait un multiple de 3 (0,5 pt). Or 10^n s'écrit avec un 1 suivi de n zéros : la somme de ses chiffres vaut 1, qui n'est pas un multiple de 3. Contradiction : $\dfrac{1}{3} \notin \mathbb{D}$ (0,5 pt). (1)

b) $126 = 6 \times 21$ et $150 = 6 \times 25$: $\dfrac{126}{150} = \dfrac{21}{25}$, irréductible ($21 = 3 \times 7$, $25 = 5^2$) ; le dénominateur ne contient que le facteur 5 : c'est un décimal, $\dfrac{21}{25} = \dfrac{84}{100} = 0{,}84$ (0,5 pt). $70 = 2 \times 35$ et $132 = 2 \times 66$: $\dfrac{70}{132} = \dfrac{35}{66}$, irréductible ($35 = 5 \times 7$, $66 = 2 \times 3 \times 11$) ; le dénominateur contient le facteur 3 : ce n'est pas un décimal (0,5 pt). (1)

c) $150 = 3 \times 50$ est un multiple de 3, et pourtant $\dfrac{126}{150} = 0{,}84$ est décimal (question b) : c'est un contre-exemple. Le critère du dénominateur ne s'applique qu'à une fraction irréductible. (1 pt) (1)

d) Supposons $\dfrac{4}{3}$ décimal : $\dfrac{4}{3} = \dfrac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Alors $\dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{3} - 1 = \dfrac{a - 10^n}{10^n}$, où $a - 10^n$ est un entier : $\dfrac{1}{3}$ serait décimal, ce qui contredit a). Donc $\dfrac{4}{3} \notin \mathbb{D}$. (1 pt) (1)

Erreur fréquente — On ne regarde le dénominateur qu'après avoir rendu la fraction irréductible : un facteur 3 qui se simplifie ne dit rien sur le caractère décimal.

Exercice 4 – Qui a raison ? *(4 pts)*

a) L'implication est fausse : $0 \in [-1\,;4]$ mais $0^2 = 0 \notin [1\,;16]$ (0,5 pt). Réciproque : « si $x^2 \in [1\,;16]$, alors $x \in [-1\,;4]$ » ; elle est fausse aussi : $(-3)^2 = 9 \in [1\,;16]$ mais $-3 \notin [-1\,;4]$ (0,5 pt). (1)

b) Non : $3 + 5 = 8$ est pair, mais 3 et 5 sont impairs (0,5 pt). La réciproque « si a et b sont pairs, alors $a + b$ est pair » est vraie : avec $a = 2k$ et $b = 2p$ (k, p entiers), $a + b = 2(k + p)$ où $k + p$ est un entier (0,5 pt). (1)

c) Supposons qu'il existe des entiers n et k tels que $6n + 4 = 6k$. Alors $4 = 6(k - n)$, donc $k - n = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$, qui n'est pas un entier, alors que $k - n$ en est un : contradiction. Aucun entier n ne convient. (1 pt) (1)

d) $|x - 0{,}5| \leqslant 2 \iff x \in [-1{,}5\,;2{,}5]$ et $|x| = |x - 0| \leqslant 3 \iff x \in [-3\,;3]$. Comme $[-1{,}5\,;2{,}5] \subset [-3\,;3]$, l'implication est vraie (0,5 pt). Sa réciproque est fausse : $x = -2$ vérifie $|-2| = 2 \leqslant 3$, mais $|-2 - 0{,}5| = 2{,}5 > 2$ (0,5 pt). (1)

Astuce — Une implication entre deux conditions sur x revient à une inclusion d'ensembles : « si $x \in I$, alors $x \in J$ » est vraie exactement quand $I \subset J$.

Exercice 5 – Problème — Des boîtes de chocolats *(5 pts)*

a) $N = 6a + 15b = 3(2a + 5b)$ et $2a + 5b$ est un entier : N est un multiple de 3, comme somme de deux multiples de 3. (1 pt) (1)

b) Contraposée de a) : « si N n'est pas un multiple de 3, alors N ne s'écrit pas $6a + 15b$ » (0,5 pt). La somme des chiffres de 100 vaut 1 : 100 n'est pas un multiple de 3, donc la commande est impossible (0,5 pt). (1)

c) $6a + 15b = 99 \iff 2a + 5b = 33$ (on divise par 3). Alors $5b = 33 - 2a$ est impair, donc b est impair, et $5b \leqslant 33$ impose $b \leqslant 6$: $b \in \{1\,;3\,;5\}$ (0,5 pt). $b = 1$ donne $a = 14$; $b = 3$ donne $a = 9$; $b = 5$ donne $a = 4$. Donc $E = \{(14\,;1)\,;(9\,;3)\,;(4\,;5)\}$ et $\mathrm{Card}(E) = 3$ (0,5 pt). (1)

d) Pour chaque nombre b de boîtes de 15 tel que $15b \leqslant N$, elle teste si le reste $N - 15b$ est un multiple de 6 (reste de la division par 6 nul) : elle renvoie True si N peut s'écrire $6a + 15b$, False sinon (0,5 pt). `possible(57)` : pour $b = 0$, $57 = 6 \times 9 + 3$; pour $b = 1$, $57 - 15 = 42 = 6 \times 7$: elle renvoie True ($a = 7$, $b = 1$). `possible(9)` : pour $b = 0$, $9 = 6 \times 1 + 3$; pour $b = 1$, $15 > 9$ et la boucle s'arrête : elle renvoie False (0,5 pt). (1)

e) La réciproque « tout multiple de 3 s'écrit $6a + 15b$ » est fausse : 9 est un multiple de 3, mais la commande est impossible : $9 < 15$ impose $b = 0$, et 9 n'est pas un multiple de 6 (0,5 pt). Soit $N = 3m$ avec $m \geqslant 4$ entier. Si m est pair, $m = 2a$ et $N = 6a$ ($b = 0$). Si m est impair, alors $m \geqslant 5$ et $m - 5 = 2a$ avec a entier naturel : $N = 3(2a + 5) = 6a + 15$ ($b = 1$). Dans les deux cas, la commande est possible (0,5 pt). (1)

Méthode — Pour prouver qu'une commande est impossible, on cherche une propriété partagée par toutes les commandes possibles (ici, être un multiple de 3) et on raisonne par contraposée.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).