Corrigé et barème – Nombres réels, arithmétique et logique — niveau ★

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 2nde

Exercice 1 – Automatismes *(4 pts)*

a) $11 \times 13 = 143$, donc $\dfrac{-143}{11} = -13$: c'est un entier négatif, il n'appartient pas à $\mathbb{N}$. Le plus petit ensemble qui le contient est $\mathbb{Z}$ (il appartient aussi à $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$). (1 pt) (1)

b) $84 = 42 \times 2$ et $126 = 42 \times 3$, donc $\dfrac{84}{126} = \dfrac{2}{3}$, irréductible car 2 et 3 n'ont pas d'autre diviseur positif commun que 1 (0,5 pt). Son dénominateur est 3, qui ne s'écrit pas avec les seuls facteurs 2 et 5 : $\dfrac{2}{3} = 0{,}666\ldots$ n'est pas décimal (0,5 pt). (1)

c) « et » impose les deux conditions à la fois : $-2 \leqslant x < 7$, soit $x \in [-2\,;7[$ (-2 inclus, 7 exclu). (1 pt) (1)

d) La négation de « P et Q » est « (non P) ou (non Q) » : « n n'est pas un multiple de 5 ou $n \leqslant 20$ ». (1 pt) (1)

Erreur fréquente — Nier un « et » donne un « ou » : « n n'est pas un multiple de 5 et $n \leqslant 20$ » est faux, car il suffit qu'une seule des deux conditions tombe.

Exercice 2 – Multiples : calculer et démontrer *(4 pts)*

a) $19 \times 23 = 437$ avec $23 \in \mathbb{Z}$: 437 est un multiple de 19, et 19 est un diviseur de 437. (1 pt) (1)

b) $15 \times 16 = 240$ et $15 \times 17 = 255 > 250$; autrement dit $250 = 15 \times 16 + 10$ avec $0 \leqslant 10 < 15$. Le plus grand multiple de 15 inférieur ou égal à 250 est 240. (1 pt) (1)

c) Soit a et b deux multiples de 6 : il existe deux entiers k et k' tels que $a = 6k$ et $b = 6k'$ (0,5 pt). Alors $a + b = 6k + 6k' = 6(k + k')$; $K = k + k'$ est un entier, donc $a + b = 6K$ est un multiple de 6 (0,5 pt). (1)

d) Oui : avec $a = 6k$ et $b = 6k'$ (k, k' entiers), $ab = 36kk'$ et kk' est un entier : ab est un multiple de 36. (1 pt) (1)

Méthode — Deux multiples quelconques s'écrivent avec deux lettres, $6k$ et $6k'$: une seule lettre reviendrait à supposer que les deux nombres sont égaux.

Exercice 3 – Intervalles et distance *(4 pts)*

a) Sur une droite graduée, la zone commune va de 1 à 5 : 1 est exclu de B et 5 est exclu de A, donc $A \cap B =]1\,;5[$ (0,5 pt). La zone couverte au moins une fois va de -3 (inclus dans A) à 8 (inclus dans B) : $A \cup B = [-3\,;8]$ (0,5 pt). (1)

b) $x\in B\iff1(1)

c) $|x - 2|$ est la distance de x à 2 ; elle est au plus 5 : $2 - 5 \leqslant x \leqslant 2 + 5$, soit $\mathcal{S} = [-3\,;7]$ (0,5 pt). Tout réel de $[-3\,;7]$ appartient à $[-3\,;8]$: $\mathcal{S} \subset A \cup B$ (0,5 pt). (1)

d) Elle est fausse : $6 \in B$ (car $1 < 6 \leqslant 8$), mais $6^2 = 36 \geqslant 25$. Ce contre-exemple, pris dans B, suffit. (1 pt) (1)

Piège — Un contre-exemple doit appartenir à l'ensemble indiqué : $x = -6$ vérifie aussi $x^2 \geqslant 25$, mais il n'est pas dans B et ne prouve rien.

Exercice 4 – Vrai ou faux ? *(4 pts)*

a) Soit x un nombre décimal : il existe $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $x = \dfrac{a}{10^n}$. Comme 10^n est un entier non nul, x est le quotient de deux entiers : $x \in \mathbb{Q}$. (1 pt) (1)

b) Réciproque : « si un nombre est rationnel, alors il est décimal » ; elle est fausse, car $\dfrac{1}{3} \in \mathbb{Q}$ mais $\dfrac{1}{3} \notin \mathbb{D}$ (0,5 pt). Contraposée : « si un nombre n'est pas rationnel, alors il n'est pas décimal » ; elle est vraie, car une implication et sa contraposée sont toujours vraies en même temps (0,5 pt). (1)

c) $\sqrt{162} = \sqrt{81 \times 2} = 9\sqrt{2}$ (0,5 pt). Si $\sqrt{162}$ était rationnel, $\sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{162}}{9}$ le serait aussi (quotient de deux rationnels) : impossible, donc $\sqrt{162}$ est irrationnel (0,5 pt). (1)

d) Vrai. $(n+5)^2 - n^2 = n^2 + 10n + 25 - n^2 = 10n + 25 = 2(5n + 12) + 1$, et $5n + 12$ est un entier : ce nombre est impair. (1 pt) (1)

Astuce — Une contraposée a toujours la même vérité que l'implication : une fois l'implication démontrée, la contraposée est acquise sans nouveau calcul, ce qui n'est pas le cas de la réciproque.

Exercice 5 – Problème — Les casiers d'un gymnase *(4 pts)*

a) $90 = 6 \times 15$: les multiples de 6 compris entre 1 et 90 sont 6×1, 6×2, …, 6×15, donc $\text{Card}(R) = 15$ (0,5 pt). $90 = 9 \times 10$, donc $\text{Card}(C) = 10$ (0,5 pt). (1)

b) On teste les éléments de C : 9, 27, 45, 63, 81 sont impairs, donc ne sont pas multiples de 6 ; en revanche $18 = 6 \times 3$, $36 = 6 \times 6$, $54 = 6 \times 9$, $72 = 6 \times 12$ et $90 = 6 \times 15$. Donc $R \cap C = \{18\,;36\,;54\,;72\,;90\}$: ce sont les casiers à la fois rouges et à clé. (1 pt) (1)

c) $\text{Card}(R \cup C) = \text{Card}(R) + \text{Card}(C) - \text{Card}(R \cap C) = 15 + 10 - 5 = 20$, car les 5 casiers de $R \cap C$ sont comptés deux fois dans $15 + 10$ (0,5 pt). « Ni rouge ni à clé » est la négation de « rouge ou à clé » : $90 - 20 = 70$ casiers (0,5 pt). (1)

d) Contre-exemple : le casier 15. $15 = 3 \times 5$ est un multiple de 3, mais il est impair, donc pas multiple de 6, et $9 < 15 < 18$, donc pas multiple de 9 : il n'est ni rouge ni à clé. (1 pt) (1)

Erreur fréquente — Additionner $15 + 10 = 25$ compte deux fois les casiers rouges et à clé : pour le cardinal d'une réunion, on retranche le cardinal de l'intersection.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).