Devoir surveillé – Généralités sur les fonctions, variations et fonctions affines — niveau ★★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 2nde

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Démontrer *(4 pts)*

a) Soit f une fonction affine telle que $f(1) = f(4)$. Démontrer que f est constante.

b) Soit f une fonction affine strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, de coefficient directeur m. Démontrer que $m < 0$.

c) Soit g une fonction strictement croissante sur un intervalle I et k un réel. Démontrer que l'équation $g(x) = k$ admet au plus une solution dans I.

d) Soit $g(x) = x^3 - 48x$ et $I = [4\,;+\infty[$. Démontrer que, pour tous réels a et b, $g(b) - g(a) = (b-a)(a^2 + ab + b^2 - 48)$, puis que g est strictement croissante sur I.

e) Vérifier que $x^3 - 48x - 128 = (x-8)(x+4)^2$, puis résoudre l'équation $g(x) = 128$ dans $\mathbb{R}$, puis dans I. Expliquer pourquoi le résultat ne contredit pas la question c).

Exercice 2 – Une famille de droites *(4 pts)*

Pour tout réel k, on note f_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = kx + 3 - 2k$, et $\mathcal{D}_k$ sa droite représentative.

a) Démontrer que toutes les droites $\mathcal{D}_k$ passent par un même point A, dont on donnera les coordonnées.

b) Soient k et k' deux réels distincts. Démontrer que $\mathcal{D}_k$ et $\mathcal{D}_{k'}$ ont A pour seul point commun.

c) Déterminer k pour que $\mathcal{D}_k$ coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 9, puis donner l'expression de $f_k(x)$ correspondante.

d) On suppose $k > 0$. Déterminer, en fonction de k, le nombre qui annule $f_k(x)$, puis dresser le tableau de signes de $f_k(x)$.

e) Déterminer l'ensemble des réels k pour lesquels $f_k(x) > 0$ pour tout x de $[0\,;4]$.

Exercice 3 – Problème — Le chemin le plus rapide *(4 pts)*

Un marcheur se trouve dans les dunes au point A, à 3 km d'une piste rectiligne ; on note H le point de la piste le plus proche de A, de sorte que le triangle AHM est rectangle en H pour tout point M de la piste. Il veut rejoindre un village V situé sur la piste, à 8 km de H. Dans le sable, il marche à 3 km/h ; sur la piste, à 5 km/h. Il marche en ligne droite de A jusqu'à un point M du segment $[HV]$, avec $HM = x$ km, puis suit la piste jusqu'à V.

a) Justifier que la durée du trajet, en heures, est $T(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+9}}{3} + \dfrac{8-x}{5}$, pour $x \in [0\,;8]$. Calculer $T(0)$ et $T(8)$ (valeur exacte, puis arrondie au centième si besoin).

b) On admet que T est décroissante puis croissante sur $[0\,;8]$. On exécute le programme ci-dessous ;

```
from math import sqrt

def T(x):
    return sqrt(x**2 + 9)/3 + (8 - x)/5

def balayage(p):
    xm = 0
    x = 0
    while x <= 8:
        if T(x) < T(xm):
            xm = x
        x = x + p
    return xm
```

Calculer $T(1)$, $T(2)$, $T(3)$ et $T(4)$ à 10^{-3} près. En déduire la valeur renvoyée par l'appel `balayage(1)`, puis un encadrement de la valeur de x qui rend la durée minimale.

c) On admet que, pour deux réels positifs a et b, $a \geqslant b \iff a^2 \geqslant b^2$. Démontrer que, pour tout x de $[0\,;8]$, $T(x) \geqslant 2{,}4 \iff 5\sqrt{x^2+9} \geqslant 3(x+4)$, puis que cette dernière inégalité équivaut à $(4x-9)^2 \geqslant 0$.

d) En déduire la durée minimale du trajet et la position du point M correspondante, puis le temps gagné par rapport au trajet qui rejoint la piste en H.

Exercice 4 – Problème — Consommation et vitesse *(4 pts)*

Sur autoroute, la consommation d'une voiture, en litres pour 100 km, est modélisée par $C(v) = 0{,}001v^2 - 0{,}14v + 9{,}5$, où $v \in [40\,;130]$ est la vitesse en km/h.

a) Démontrer que $C(v) = 0{,}001(v-70)^2 + 4{,}6$. En déduire la consommation minimale et la vitesse correspondante.

b) Démontrer que C est strictement croissante sur $[70\,;130]$. (On admet que C est strictement décroissante sur $[40\,;70]$.)

c) Déterminer les vitesses pour lesquelles $C(v) \leqslant 6$; donner la valeur exacte de la borne obtenue, puis son arrondi à l'unité.

d) Pour un trajet de 360 km avec un carburant à 1,80 € le litre, le coût du carburant, en euros, est $K(v) = 6{,}48\,C(v)$. Justifier cette formule et expliquer pourquoi K a les mêmes variations que C. Calculer ensuite le surcoût et le temps gagné en roulant à 130 km/h plutôt qu'à 110 km/h.

Exercice 5 – Pour aller plus loin — Valeurs extrêmes imposées *(4 pts)*

a) On cherche les fonctions affines f dont le minimum sur $[0\,;4]$ vaut 1 et le maximum vaut 9. On rappelle (exercice 2, question e)) que, sur un segment, une fonction affine atteint son minimum et son maximum aux bornes. Déterminer toutes les fonctions qui conviennent.

b) Généraliser : $a

c) Démontrer que, pour toute fonction affine f, $f(1) = \dfrac{f(0)+f(2)}{2}$. En déduire qu'il n'existe aucune fonction affine f dont le minimum sur $[0\,;2]$ vaut 0, le maximum vaut 2, et telle que $f(1) = 1{,}5$.

d) Soit $h(x) = -0{,}5x^2 + 2x$ sur $[0\,;2]$. Démontrer que h est strictement croissante sur $[0\,;2]$, puis vérifier qu'elle remplit les trois conditions de la question c).

Bon courage !

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).