Corrigé et barème – Généralités sur les fonctions, variations et fonctions affines — niveau ★★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 2nde

Exercice 1 – Démontrer *(4 pts)*

a) Notons $f(x) = mx + p$. Alors $f(4) - f(1) = (4m + p) - (m + p) = m(4 - 1) = 3m$. Or $f(4) - f(1) = 0$, donc $m = 0$ et $f(x) = p$ pour tout réel x : f est constante. (1 pt) (0,8)

b) Le taux d'accroissement de f entre 0 et 1 vaut m : $m = \dfrac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = f(1) - f(0)$. Comme $0 < 1$ et f est strictement décroissante, $f(1)<f(0)$. (1 pt) (0,8)

c) Raisonnons par l'absurde : supposons que l'équation ait deux solutions distinctes a et b dans I, avec $a<b$. (1 pt) (0,8)

d) En développant, $(b - a)(a^2 + ab + b^2) = a^2b + ab^2 + b^3 - a^3 - a^2b - ab^2 = b^3 - a^3$. Donc $(b - a)(a^2 + ab + b^2 - 48) = b^3 - a^3 - 48b + 48a = g(b) - g(a)$. Si $a<b\leqslant 0$, $a^2\geqslant 16$, $b^2>16$ donnent $a^2+ab+b^2>48$. Ainsi $g(b)-g(a)>0$: g est strictement croissante sur I. (1 pt) (0,8)

e) $(x + 4)^2 = x^2 + 8x + 16$, et $(x - 8)(x^2 + 8x + 16) = x^3 + 8x^2 + 16x - 8x^2 - 64x - 128 = x^3 - 48x - 128$. Donc $g(x) = 128 \iff (x - 8)(x + 4)^2 = 0 \iff x = 8$ ou $x = -4$: dans $\mathbb{R}$, les solutions sont -4 et 8. Dans I, seule 8 convient. Pas de contradiction : g n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$ (par exemple $0 < 4$ mais $g(0) = 0 > g(4) = -128$), et la propriété c) ne s'applique que sur I. (0,5 pt) (0,8)

Méthode — Une fonction strictement monotone sur un intervalle ne prend jamais deux fois la même valeur sur cet intervalle : c'est ce qui garantit l'unicité d'une solution.

Exercice 2 – Une famille de droites *(4 pts)*

a) $f_k(x) = k(x - 2) + 3$, donc $f_k(2) = 3$ quel que soit k : toutes les droites $\mathcal{D}_k$ passent par $A(2\,;3)$. (0,5 pt) (0,8)

b) $f_k(x) - f_{k'}(x) = kx - 2k - k'x + 2k' = (k - k')(x - 2)$. Comme $k - k' \neq 0$, $f_k(x) = f_{k'}(x) \iff x = 2$: les deux droites ont un seul point commun, d'abscisse 2, c'est $A(2\,;3)$. (0,5 pt) (0,8)

c) $f_k(0) = 3 - 2k$, et $3 - 2k = 9 \iff k = -3$. Alors $f_{-3}(x) = -3x + 3 + 6 = -3x + 9$. Contrôle : $f_{-3}(0) = 9$ et $f_{-3}(2) = -6 + 9 = 3$. (1 pt) (0,8)

d) $k(x - 2) + 3 = 0 \iff x - 2 = -\dfrac{3}{k} \iff x = 2 - \dfrac{3}{k}$ $(k \neq 0)$. Comme $k > 0$, $f_k(x)$ est négatif avant ce nombre et positif après.

x	$-\infty$		$2 - \dfrac{3}{k}$		$+\infty$
$f_k(x)$		$-$	0	$+$	

(1 pt) (0,8)

e) f_k est affine, donc monotone sur $[0\,;4]$ (constante si $k = 0$) : son minimum sur $[0\,;4]$ est $f_k(0)$ ou $f_k(4)$. Ainsi $f_k(x) > 0$ sur $[0\,;4] \iff f_k(0) > 0$ et $f_k(4) > 0$. Or $f_k(0) = 3 - 2k > 0 \iff k < 1{,}5$ et $f_k(4) = 2k + 3 > 0 \iff k > -1{,}5$. Réponse : $k \in \,]-1{,}5\,;1{,}5[$. (1 pt) (0,8)

Astuce — Sur un segment, une fonction affine atteint son minimum et son maximum aux bornes : pour qu'elle soit positive sur tout le segment, il suffit de tester les deux bornes.

Exercice 3 – Problème — Le chemin le plus rapide *(4 pts)*

a) Dans le triangle AHM rectangle en H, le théorème de Pythagore donne $AM = \sqrt{AH^2 + HM^2} = \sqrt{x^2+9}$, parcourus à 3 km/h : durée $\dfrac{\sqrt{x^2+9}}{3}$. Puis $MV = 8 - x$ km à 5 km/h : durée $\dfrac{8-x}{5}$. M est sur $[HV]$, donc $x \in [0\,;8]$. $T(0) = \dfrac{3}{3} + \dfrac{8}{5} = 2{,}6$ h et $T(8) = \dfrac{\sqrt{73}}{3} \approx 2{,}85$ h. (1 pt) (1)

b) $T(1) = \dfrac{\sqrt{10}}{3} + 1{,}4 \approx 2{,}454$; $T(2) = \dfrac{\sqrt{13}}{3} + 1{,}2 \approx 2{,}402$; $T(3) = \sqrt{2} + 1 \approx 2{,}414$; $T(4) = \dfrac{5}{3} + 0{,}8 \approx 2{,}467$. Avec $T(0) = 2{,}6$, les images décroissent jusqu'en 2 puis croissent : T étant décroissante puis croissante, les images en 5, 6, 7, 8 dépassent $T(4)$. Le programme calcule T en $0\,;1\,;\ldots\,;8$ et garde l'abscisse de la plus petite image : il renvoie 2. Comme T décroît puis croît, le minimum est atteint entre 1 et 3. (1 pt) (1)

c) $T(x) \geqslant 2{,}4 \iff \dfrac{\sqrt{x^2+9}}{3} \geqslant 2{,}4 - \dfrac{8-x}{5} = \dfrac{12 - 8 + x}{5} = \dfrac{x+4}{5} \iff 5\sqrt{x^2+9} \geqslant 3(x+4)$ (on multiplie par $15 > 0$). Les deux membres sont positifs car $x \geqslant 0$, donc cela équivaut à $25(x^2+9) \geqslant 9(x+4)^2 \iff 25x^2 + 225 \geqslant 9x^2 + 72x + 144 \iff 16x^2 - 72x + 81 \geqslant 0 \iff (4x-9)^2 \geqslant 0$. (1 pt) (1)

d) Un carré est toujours positif ou nul : $T(x) \geqslant 2{,}4$ pour tout x de $[0\,;8]$, avec égalité si et seulement si $4x - 9 = 0$, soit $x = \dfrac{9}{4} = 2{,}25$, qui est bien dans $[1\,;3]$. La durée minimale est 2,4 h, soit 2 h 24 min, en rejoignant la piste à 2,25 km de H. Par H, le trajet dure $T(0) = 2{,}6$ h : on gagne 0,2 h, soit 12 min. (1 pt) (1)

Piège — Un balayage ne donne qu'un encadrement : le minimum exact, atteint en 2,25, n'est pas un multiple du pas.

Exercice 4 – Problème — Consommation et vitesse *(4 pts)*

a) $0{,}001(v-70)^2 + 4{,}6 = 0{,}001(v^2 - 140v + 4\,900) + 4{,}6 = 0{,}001v^2 - 0{,}14v + 4{,}9 + 4{,}6 = C(v)$. Comme $(v-70)^2 \geqslant 0$, $C(v) \geqslant 4{,}6 = C(70)$, avec $70 \in [40\,;130]$: la consommation minimale est 4,6 L pour 100 km, à 70 km/h. (1 pt) (1)

b) Soient \$70\leqslant a0, et a\geqslant70,b>70 donnent a+b-140>0 : C(b)-C(a)>0, donc C est strictement croissante sur [70\,;130]\$. (1 pt) (1)

c) $C(v) = 6 \iff 0{,}001(v-70)^2 = 1{,}4 \iff (v-70)^2 = 1\,400 \iff v = 70 + 10\sqrt{14}$ ou $v = 70 - 10\sqrt{14}$. Or $70 - 10\sqrt{14} \approx 32{,}6$ n'est pas dans $[40\,;130]$. Sur $[40\,;70]$, C décroît de $C(40) = 5{,}5$ à 4,6, donc $C(v) \leqslant 5{,}5 < 6$. Sur $[70\,;130]$, C croît : $C(v) \leqslant 6 \iff v \leqslant 70 + 10\sqrt{14}$. Conclusion : $C(v) \leqslant 6 \iff v \in \left[40\,;70 + 10\sqrt{14}\right]$, soit jusqu'à environ 107 km/h. (1 pt) (1)

d) 360 km, c'est 3,6 fois 100 km : on consomme $3{,}6\,C(v)$ litres, qui coûtent $1{,}8 \times 3{,}6\,C(v) = 6{,}48\,C(v)$ euros. La fonction linéaire $y \mapsto 6{,}48y$ est strictement croissante ($6{,}48 > 0$) : si \$C(a)(1)

Erreur fréquente — En résolvant $(v-70)^2 = 1\,400$, on oublie souvent l'une des deux solutions, ou l'on garde une valeur hors de l'intervalle d'étude : on écrit les deux, puis on les confronte au domaine.

Exercice 5 – Pour aller plus loin — Valeurs extrêmes imposées *(4 pts)*

a) D'après le rappel, le minimum et le maximum sont $f(0)$ et $f(4)$; une fonction constante est exclue car $1 \neq 9$. Cas croissant : $f(0) = 1$ et $f(4) = 9$, d'où $m = \dfrac{9-1}{4-0} = 2$ et $f(x) = 2x + 1$. Cas décroissant : $f(0) = 9$ et $f(4) = 1$, d'où $m = -2$ et $f(x) = -2x + 9$. Il y a exactement deux fonctions. (1 pt) (1)

b) Cas croissant : $f(a) = c$ et $f(b) = d$, donc $m = \dfrac{d-c}{b-a}$ et $f(x) = c + \dfrac{d-c}{b-a}(x-a)$. Cas décroissant : $f(a) = d$ et $f(b) = c$, donc $f(x) = d - \dfrac{d-c}{b-a}(x-a)$. Contrôle avec a) : $1 + \dfrac{8}{4}x = 2x + 1$ et $9 - \dfrac{8}{4}x = -2x + 9$. (1 pt) (1)

c) Avec $f(x) = mx + p$: $f(0) + f(2) = p + 2m + p = 2(m + p) = 2f(1)$. D'après a), sur $[0\,;2]$ le minimum et le maximum sont $f(0)$ et $f(2)$, dans un ordre ou dans l'autre : ces deux nombres sont 0 et 2, donc $f(1) = \dfrac{0+2}{2} = 1 \neq 1{,}5$. Une telle fonction affine n'existe pas. (1 pt) (1)

d) $h(b) - h(a) = -0{,}5(b^2 - a^2) + 2(b - a) = (b - a)\big(2 - 0{,}5(a + b)\big)$. Si $0 \leqslant a < b < 4$, $2 - 0{,}5(a+b) > 0$: h est strictement croissante sur $[0\,;2]$. Son minimum est $h(0) = 0$, son maximum $h(2) = -2 + 4 = 2$, et $h(1) = -0{,}5 + 2 = 1{,}5$: h convient (elle n'est pas affine). (1 pt) (1)

Astuce — Pour une fonction affine, l'image du milieu de deux nombres est la moyenne de leurs images : c'est une conséquence directe des accroissements proportionnels.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).