Devoir surveillé – Généralités sur les fonctions, variations et fonctions affines — niveau ★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 2nde

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Automatismes *(3 pts)*

a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $u : x \mapsto \dfrac{4x-1}{\sqrt{x+5}}$.

b) f est une fonction affine telle que $f(9) - f(-3) = 10$. Calculer son coefficient directeur.

c) Le nombre 3 a-t-il des antécédents par la fonction $x \mapsto x^2 + 4$? Justifier.

d) Déterminer les antécédents de 1 par la fonction $v : x \mapsto 5 - (x+2)^2$.

Exercice 2 – Démontrer — Variations d'une fonction affine *(4 pts)*

a) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$, avec $m > 0$. Soient u et v deux réels tels que $u

b) Soit $h(x) = \dfrac{3x}{4} - \dfrac{x-6}{2}$. Montrer que h est une fonction affine et donner son sens de variation.

c) Sans calculer les images, comparer $h(-2{,}8)$ et $h(-2{,}71)$.

d) Dresser le tableau de variations de h sur $[-8\,;4]$ et donner le minimum et le maximum de h sur cet intervalle.

e) Résoudre l'inéquation $h(x) < 0$ et interpréter le résultat sur la droite représentant h.

Exercice 3 – Valeurs, variations et équations *(4 pts)*

Soit f la fonction définie sur $[-2\,;6]$ par $f(x) = x^2 - 2x - 6$.

a) Recopier et compléter le tableau de valeurs de f :

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$									

b) Démontrer que, pour tout réel x, $f(x) = (x-1)^2 - 7$. En déduire le minimum de f sur $[-2\,;6]$ et en quelle valeur il est atteint.

c) On admet que f est strictement décroissante sur $[-2\,;1]$ et strictement croissante sur $[1\,;6]$. On admet que sa courbe se trace sans lever le crayon. Dresser le tableau de variations de f, donner son maximum sur $[-2\,;6]$, puis le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur cet intervalle.

d) Résoudre algébriquement l'équation $f(x) = -6$ sur $[-2\,;6]$.

e) À l'aide des variations de f, déterminer les réels x de $[-2\,;6]$ tels que $f(x) \leqslant 2$.

Exercice 4 – Qui a raison ? *(4 pts)*

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse, en justifiant par une démonstration ou un contre-exemple.

a) Sam : « Si une fonction f est croissante sur $[1\,;2]$ et croissante sur $[2\,;4]$, alors f est croissante sur $[1\,;4]$. »

b) Lina : « Si f est une fonction affine telle que $f(3) > f(5)$, alors $f(x) > 0$ pour tout réel x négatif. »

c) Malo : « Les points $E(-2\,;5)$ et $F(-2\,;-3)$ peuvent appartenir tous les deux à la courbe d'une même fonction. »

d) Inès : « Sur $[-1\,;3]$, la fonction $x \mapsto x^2$ a pour minimum 1, atteint en -1. »

Exercice 5 – Problème — Le verger *(5 pts)*

Un arboriculteur plante x pommiers par hectare, avec $20 \leqslant x \leqslant 80$. Plus les arbres sont serrés, moins chacun produit : chaque arbre ajouté fait baisser d'une même quantité la récolte de chaque arbre. Avec 30 arbres, chacun donne 45 kg de pommes ; avec 50 arbres, chacun en donne 35 kg. On note $r(x)$ la récolte d'un arbre, en kg.

a) Justifier que r est une fonction affine, puis montrer que $r(x) = 60 - 0{,}5x$. Interpréter le nombre $-0{,}5$.

b) On note $P(x)$ la production totale d'un hectare, en kg. Montrer que $P(x) = 60x - 0{,}5x^2$, puis calculer $P(40)$.

c) Démontrer que $P(x) = 1\,800 - 0{,}5(x - 60)^2$. En déduire le nombre d'arbres qui rend la production maximale, et cette production.

d) Résoudre l'équation $P(x) = 1\,750$. On admet que P est croissante sur $[20\,;60]$ et décroissante sur $[60\,;80]$: en déduire pour quels nombres d'arbres la production atteint au moins $1\,750$ kg.

e) Les pommes sont vendues $1{,}50$ € le kg et chaque arbre coûte 12 € par an. Le bénéfice annuel d'un hectare est alors $B(x) = 1{,}5P(x) - 12x = 78x - 0{,}75x^2$, en euros. Le programme Python ci-dessous renvoie 52.

```
def B(x):
    return 78*x - 0.75*x**2

def meilleur():
    xm = 20
    for x in range(20, 81):
        if B(x) > B(xm):
            xm = x
    return xm
```

Expliquer ce que fait ce programme, puis démontrer que $B(x) = 2\,028 - 0{,}75(x - 52)^2$ et conclure.

Bon courage !

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).