Corrigé et barème – Généralités sur les fonctions, variations et fonctions affines — niveau ★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 2nde

Exercice 1 – Automatismes *(3 pts)*

a) Il faut $x+5 \geqslant 0$ (racine carrée) et $\sqrt{x+5} \neq 0$ (dénominateur), donc $x+5>0$, soit $x>-5$: $D_u =]-5\,;+\infty[$. (1 pt) (0,75)

b) Pour une fonction affine, $f(9)-f(-3) = m\big(9-(-3)\big) = 12m$. Donc $12m=10$ et $m=\dfrac{10}{12}=\dfrac{5}{6}$. (0,5 pt) (0,75)

c) Un carré est positif ou nul, donc $x^2+4 \geqslant 4 > 3$ pour tout réel x : l'équation $x^2+4=3$ n'a pas de solution, et 3 n'a aucun antécédent. (0,5 pt) (0,75)

d) $v(x)=1 \iff 5-(x+2)^2=1 \iff (x+2)^2=4 \iff x+2=2$ ou $x+2=-2$, soit $x=0$ ou $x=-4$. Contrôle : $v(0)=5-4=1$ et $v(-4)=5-4=1$. Les antécédents de 1 par v sont -4 et 0. (1 pt) (0,75)

Piège — Une racine carrée placée au dénominateur impose une inégalité stricte : $\sqrt{x+5}$ existe pour $x=-5$, mais vaut alors 0 et rend le quotient impossible.

Exercice 2 – Démontrer — Variations d'une fonction affine *(4 pts)*

a) $f(v)-f(u) = (mv+p)-(mu+p) = mv-mu = m(v-u)$. Comme $u<v$ et $m>0$, le produit $m(v-u)$ est strictement positif. Donc $f(u)<f(v)$. (0,8)

b) $h(x) = 0{,}75x - 0{,}5x + 3 = 0{,}25x+3$: h est affine, de coefficient directeur $\dfrac{1}{4}>0$, donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$ d'après a). (0,5 pt) (0,8)

c) $-2{,}8 < -2{,}71$ et h est strictement croissante : $h(-2{,}8) < h(-2{,}71)$. (0,8)

d) $h(-8) = -2+3 = 1$ et $h(4) = 1+3 = 4$.

x	-8		4
$h(x)$	1	$\nearrow$	4

Sur $[-8\,;4]$, le minimum de h est 1, atteint en -8, et le maximum est 4, atteint en 4. (1 pt) (0,8)

e) $0{,}25x+3<0 \iff 0{,}25x<-3 \iff x<-12$: $\mathcal{S}=]-\infty\,;-12[$. La droite représentant h est strictement au-dessous de l'axe des abscisses à gauche du point $(-12\,;0)$. (0,5 pt) (0,8)

Méthode — Pour démontrer un sens de variation, on prend deux réels quelconques $u

Exercice 3 – Valeurs, variations et équations *(4 pts)*

a)

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	2	-3	-6	-7	-6	-3	2	9	18

Par exemple $f(-2) = 4 + 4 - 6 = 2$ et $f(6) = 36 - 12 - 6 = 18$. (0,5 pt) (0,8)

b) $(x-1)^2 - 7 = x^2 - 2x + 1 - 7 = x^2 - 2x - 6 = f(x)$. Un carré est positif ou nul, donc $f(x) \geqslant -7$; et $f(1) = -7$ avec $1 \in [-2\,;6]$. Le minimum de f est -7, atteint en 1. (1 pt) (0,8)

c)

x	-2		1		6
$f(x)$	2	$\searrow$	-7	$\nearrow$	18

Le maximum de f sur $[-2\,;6]$ est 18, atteint en 6. Sur $[-2\,;1]$, f passe de 2 à -7 : une solution de $f(x) = 0$; sur $[1\,;6]$, de -7 à 18 : une solution. L'équation a 2 solutions. (1 pt) (0,8)

d) $x^2 - 2x - 6 = -6 \iff x^2 - 2x = 0 \iff x(x-2) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 2$, deux valeurs de $[-2\,;6]$: $\mathcal{S} = \{0\,;2\}$, en accord avec le tableau de valeurs. (1 pt) (0,8)

e) Sur $[-2\,;1]$, f décroît de $f(-2) = 2$ à -7, donc $f(x) \leqslant 2$ pour tout x de cet intervalle. Sur $[1\,;6]$, f est strictement croissante et $f(4) = 2$: $f(x) \leqslant 2 \iff x \leqslant 4$. Donc $\mathcal{S} = [-2\,;4]$. (Contrôle : $f(x) \leqslant 2 \iff (x-1)^2 \leqslant 9 \iff -3 \leqslant x - 1 \leqslant 3$.) (0,5 pt) (0,8)

Astuce — Sur un intervalle où f est monotone, une inéquation $f(x) \leqslant k$ se résout en repérant le nombre dont l'image vaut k.

Exercice 4 – Qui a raison ? *(4 pts)*

a) Vrai. Soient $u \leqslant v$ deux réels de $[1\,;4]$. S'ils sont dans le même intervalle $[1\,;2]$ ou $[2\,;4]$, alors $f(u) \leqslant f(v)$. Sinon $u \leqslant 2 \leqslant v$, et $f(u) \leqslant f(2) \leqslant f(v)$. Dans tous les cas $f(u) \leqslant f(v)$: f est croissante sur $[1\,;4]$. (1 pt) (1)

b) Faux. $f(3) > f(5)$ avec $3 < 5$ montre seulement que le coefficient directeur est négatif. Contre-exemple : $f(x) = -x - 10$, avec $f(3) = -13 > f(5) = -15$, mais $f(-1) = -9 < 0$. (1 pt) (1)

c) Faux. Les deux points ont la même abscisse -2 : le nombre -2 aurait deux images, 5 et -3, alors qu'une fonction associe à chaque nombre une seule image. (1 pt) (1)

d) Faux. $0 \in [-1\,;3]$ et $0^2 = 0 < 1$. En fait, pour tout réel x, $x^2 \geqslant 0 = 0^2$: le minimum sur $[-1\,;3]$ est 0, atteint en 0, et non à une borne. (1 pt) (1)

Erreur fréquente — Pour réfuter un « pour tout », un seul contre-exemple suffit ; pour l'établir, il faut une démonstration valable dans tous les cas.

Exercice 5 – Problème — Le verger *(5 pts)*

a) La récolte de chaque arbre baisse de la même quantité pour chaque arbre ajouté : r varie de façon constante, c'est une fonction affine $r(x) = mx + p$. $m = \dfrac{35-45}{50-30} = \dfrac{-10}{20} = -0{,}5$ et $p = 45 - (-0{,}5) \times 30 = 45 + 15 = 60$, donc $r(x) = 60 - 0{,}5x$. Chaque arbre supplémentaire fait perdre 0,5 kg de pommes à chacun des arbres. (1 pt) (1)

b) $P(x) = x \times r(x) = x(60 - 0{,}5x) = 60x - 0{,}5x^2$ (et $r(x) \geqslant r(80) = 20 > 0$ sur $[20\,;80]$, le modèle a un sens). $P(40) = 2\,400 - 0{,}5 \times 1\,600 = 2\,400 - 800 = 1\,600$ kg. (1 pt) (1)

c) $1\,800 - 0{,}5(x^2 - 120x + 3\,600) = 1\,800 - 0{,}5x^2 + 60x - 1\,800 = 60x - 0{,}5x^2 = P(x)$. Comme $(x-60)^2 \geqslant 0$, $P(x) \leqslant 1\,800$; et $P(60) = 1\,800$ avec $60 \in [20\,;80]$. La production est maximale avec 60 arbres par hectare : 1 800 kg. (1 pt) (1)

d) $P(x) = 1\,750 \iff 0{,}5(x-60)^2 = 50 \iff (x-60)^2 = 100 \iff x - 60 = 10$ ou $x - 60 = -10$, soit $x = 70$ ou $x = 50$. Sur $[20\,;60]$, P est croissante : $P(x) \geqslant 1\,750 = P(50) \iff x \geqslant 50$. Sur $[60\,;80]$, elle est décroissante : $P(x) \geqslant P(70) \iff x \leqslant 70$. La production atteint au moins 1 750 kg pour $50 \leqslant x \leqslant 70$. (1 pt) (1)

e) Le programme calcule $B(x)$ pour chaque entier x de 20 à 80 (balayage de pas 1) et garde celui qui donne le plus grand bénéfice. $2\,028 - 0{,}75(x^2 - 104x + 2\,704) = 2\,028 - 0{,}75x^2 + 78x - 2\,028 = 78x - 0{,}75x^2 = B(x)$. Donc $B(x) \leqslant 2\,028 = B(52)$ pour tout x : le bénéfice est maximal avec 52 arbres (et non 60) et vaut 2 028 €. (1 pt) (1)

Astuce — Une écriture « nombre moins un multiple positif d'un carré » donne directement le maximum : on le lit sur la forme, puis on vérifie que la valeur trouvée appartient à l'intervalle d'étude.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).