Corrigé et barème – Généralités sur les fonctions, variations et fonctions affines — niveau ★

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 2nde

Exercice 1 – Automatismes *(5 pts)*

a) $f(-1) = (-1)^2 - 3 \times (-1) + 5 = 1 + 3 + 5 = 9$. (1 pt) (1)

b) $6x - 21 = 0 \iff x = \dfrac{21}{6} = \dfrac{7}{2}$: la valeur interdite est $\dfrac{7}{2} = 3{,}5$. $2x + 1 = 0 \iff x = -\dfrac{1}{2}$, qui n'est pas la valeur interdite : l'expression est nulle en $-0{,}5$. (1 pt) (1)

c) $g(x) = -1{,}2x + 2{,}5$: $m = -1{,}2$ et $p = 2{,}5$. Comme $m < 0$, g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. (1 pt : 0,5 pt pour m et p, 0,5 pt pour le sens de variation) (1)

d) $-2{,}5$, 1 et 3 appartiennent à $[-3\,;4]$ et h y est strictement décroissante : elle inverse l'ordre. Comme $-2{,}5 < 1$, $h(-2{,}5) > h(1) = 0$: $h(-2{,}5)$ est positif. Comme $3 > 1$, $h(3)$ (1)

e) $k(2) = 2^3 - 4 \times 2 + c = 8 - 8 + c = c$. Le point A appartient à la courbe de k si et seulement si $k(2) = -3$, c'est-à-dire $c = -3$. (1 pt) (1)

Erreur fréquente — Une fonction décroissante inverse l'ordre : de $-2{,}5 < 1$ on déduit $h(-2{,}5) > h(1)$, et non une inégalité dans le même sens.

Exercice 2 – Lire un tableau de variations *(5 pts)*

a) g est strictement croissante sur $[-6\,;-2]$, strictement décroissante sur $[-2\,;1]$ et strictement croissante sur $[1\,;5]$. (1 pt) (1)

b) Les images écrites dans le tableau sont -1, 4, -3 et 2. Le maximum vaut 4, atteint en -2 ; le minimum vaut -3, atteint en 1. (1 pt) (1)

c) -1 et 0 appartiennent à $[-2\,;1]$, où g est strictement décroissante, et $-1 < 0$: donc $g(-1) > g(0)$. (1 pt) (1)

d) On raisonne flèche par flèche. Sur $[-6\,;-2]$, g passe de -1 à 4 et 0 est compris entre ces nombres : une seule solution α, différente des bornes car $g(-6) \neq 0$ et $g(-2) \neq 0$, donc $\alpha \in\,]-6\,;-2[$. Sur $[-2\,;1]$, de 4 à -3 : une seule solution $\beta \in\,]-2\,;1[$. Sur $[1\,;5]$, de -3 à 2 : une seule solution $\gamma \in\,]1\,;5[$. Comme $g(-6) = -1 < 0$:

x	-6		α		β		γ		5
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

(1 pt) (1)

e) $1{,}25 \times 1 - 4{,}25 = -3$ et $1{,}25 \times 5 - 4{,}25 = 6{,}25 - 4{,}25 = 2$: on retrouve $g(1) = -3$ et $g(5) = 2$. Puis $1{,}25x - 4{,}25 = 0 \iff x = \dfrac{4{,}25}{1{,}25} = 3{,}4$, et $3{,}4 \in\,]1\,;5[$: $\gamma = 3{,}4$. (1 pt : 0,5 pt pour la vérification, 0,5 pt pour la solution) (1)

Méthode — Pour compter les solutions de $g(x) = k$, on lit le tableau flèche par flèche : chaque flèche dont les deux extrémités encadrent k fournit exactement une solution.

Exercice 3 – Une fonction affine, de sa définition à son signe *(5 pts)*

a) Le coefficient directeur est la variation de $f(x)$ quand x augmente de 1 : $m = -3$. Puis $p = f(2) - m \times 2 = -2 + 6 = 4$. Donc $f(x) = -3x + 4$; contrôle : $f(2) = -6 + 4 = -2$. (1 pt) (1)

b) f est affine de coefficient directeur $-3 < 0$: elle est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Sur $[-2\,;2]$, le maximum est $f(-2) = 6 + 4 = 10$, atteint en -2, et le minimum est $f(2) = -6 + 4 = -2$, atteint en 2. (1 pt) (1)

c) $-3x + 4 = 0 \iff x = \dfrac{4}{3}$. Le coefficient directeur -3 est négatif : $f(x)$ est positif avant $\dfrac{4}{3}$ et négatif après.

x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

(1 pt) (1)

d) $-3x + 4 \geqslant -2 \iff -3x \geqslant -6 \iff x \leqslant 2$ (on divise par $-3 < 0$: le sens de l'inégalité change). $\mathcal{S} =]-\infty\,;2]$. (1 pt) (1)

e) $f\left(-\dfrac{2}{3}\right) = -3 \times \left(-\dfrac{2}{3}\right) + 4 = 2 + 4 = 6$: B appartient à la droite. $f(1{,}5) = -4{,}5 + 4 = -0{,}5 \neq -1$: C n'appartient pas à la droite. (1 pt) (1)

Piège — Le signe de m donne le sens de variation, pas le signe de $f(x)$: f est décroissante, et pourtant $f(x)$ est positif pour tous les x inférieurs à $\dfrac{4}{3}$.

Exercice 4 – Problème — Un ballon-sonde *(5 pts)*

a) Quotients entre colonnes successives : $\dfrac{3{,}3 - 0{,}3}{10 - 0} = \dfrac{3}{10} = 0{,}3$; $\dfrac{7{,}8 - 3{,}3}{25 - 10} = \dfrac{4{,}5}{15} = 0{,}3$; $\dfrac{12{,}3 - 7{,}8}{40 - 25} = \dfrac{4{,}5}{15} = 0{,}3$. Ils sont tous égaux : c'est une fonction affine de coefficient directeur 0,3, avec $p = A(0) = 0{,}3$. Donc $A(t) = 0{,}3t + 0{,}3$: le ballon monte de 0,3 km, soit 300 m, par minute. (1 pt) (1)

b) $0{,}3t + 0{,}3 = 30 \iff 0{,}3t = 29{,}7 \iff t = 99$: le ballon éclate au bout de 99 min, d'où $t \in [0\,;99]$. A est affine de coefficient directeur $0{,}3 > 0$: elle est strictement croissante. Minimum $A(0) = 0{,}3$ km, maximum $A(99) = 30$ km. (1 pt) (1)

c) $0{,}3t + 0{,}3 = 9{,}3 \iff 0{,}3t = 9 \iff t = 30$. Le ballon est à 9,3 km d'altitude 30 minutes après le lâcher. (1 pt) (1)

d) $0{,}3t + 0{,}3 > 12 \iff 0{,}3t > 11{,}7 \iff t > 39$. Avec $t \in [0\,;99]$: $\mathcal{S} =]39\,;99]$. Le ballon est dans la stratosphère pendant les 60 dernières minutes de son vol. (1 pt) (1)

e) $A(50) = 15 + 0{,}3 = 15{,}3 \neq 15$: le point $(50\,;15)$ n'est pas sur la droite ; $A(70) = 21 + 0{,}3 = 21{,}3$: le point $(70\,;21{,}3)$ y est. $3 \leqslant 0{,}3t + 0{,}3 \leqslant 9 \iff 2{,}7 \leqslant 0{,}3t \leqslant 8{,}7 \iff 9 \leqslant t \leqslant 29$: le capteur fonctionne de la 9e à la 29e minute, soit pendant 20 minutes. (1 pt : 0,5 pt pour les points, 0,5 pt pour le capteur) (1)

Méthode — Pour reconnaître un modèle affine dans un tableau, on calcule les quotients « variation de A sur variation de t » entre colonnes successives : ils doivent tous être égaux, et leur valeur commune est le coefficient directeur.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).