

Devoir surveillé – Fonctions : généralités, fonctions affines, carré et inverse — niveau ★★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 2^{nde}

Nom : _____

Date : _____

Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Automatismes

(3 pts)

- a) Donner l'ensemble de définition de $x \mapsto \frac{1}{x^2 - 9}$.
- b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(2x - 1)^2 = 25$.
- c) Résoudre l'équation $\frac{1}{x + 2} = -4$.
- d) Déterminer la fonction affine f telle que $f(-2) = 7$ et $f(6) = 1$.
- e) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^2 \leq 2$.
- f) Résoudre dans $\mathbb{R}^*$ l'inéquation $\frac{1}{x} \leq 3$.

Exercice 2 – Démontrer

(4 pts)

- a) Démontrer que la fonction carré est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
- b) Démontrer que la fonction inverse est strictement décroissante sur $] -\infty; 0[$.
- c) Soit $f(x) = ax + b$ avec $a < 0$. Démontrer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
- d) Démontrer que, pour tout réel $x > 0$, $x + \frac{1}{x} \geq 2$. Dans quel cas y a-t-il égalité ?
- e) Démontrer que, si $\$0$

Exercice 3 – Cordes d'une parabole

(4 pts)

On note $\mathcal{P}$ la courbe de la fonction carré dans un repère.

- a) Calculer le coefficient directeur de la droite (AB) , où $A(-1; 1)$ et $B(3; 9)$ sont deux points de $\mathcal{P}$.
 - a) Déterminer l'équation réduite de (AB) .
 - b) Généralisation : soit $a \neq b$ deux réels, $M(a; a^2)$ et $N(b; b^2)$. Montrer que le coefficient directeur de (MN) est $a + b$.
 - c) Déterminer le point N de $\mathcal{P}$ tel que la droite (AN) soit parallèle à la droite d'équation $y = 5x - 2$.
 - d) Montrer que, sur $] -1; 3[$, la parabole $\mathcal{P}$ est située sous la droite (AB) .

Exercice 4 – Pour aller plus loin — Hyperbole et droites**(4 pts)**

On note $\mathcal{H}$ la courbe de la fonction inverse sur $]0; +\infty[$ et d la droite d'équation $y = -\frac{x}{4} + 1$.

a) Montrer que, pour tout $x > 0$, $\frac{1}{x} - \left(-\frac{x}{4} + 1\right) = \frac{(x-2)^2}{4x}$.

a) En déduire la position relative de $\mathcal{H}$ et de d , ainsi que leurs points communs.

b) Généralisation : pour $a > 0$, on note d_a la droite d'équation $y = -\frac{x}{a^2} + \frac{2}{a}$. Montrer que $\mathcal{H}$ est au-dessus de d_a et qu'elles ont un unique point commun, que l'on précisera.

c) La droite d_a coupe l'axe des ordonnées en P et l'axe des abscisses en Q . Montrer que le point commun trouvé en c) est le milieu de $[PQ]$.

Exercice 5 – Problème — Un enclos contre un mur**(5 pts)**

Un maraîcher veut un enclos rectangulaire de 200 m^2 adossé à un mur ; il pose du grillage sur les trois autres côtés. On note x (en m) la longueur de chacun des deux côtés perpendiculaires au mur, avec $4 \leq x \leq 50$.

a) Exprimer la longueur du côté parallèle au mur en fonction de x , puis montrer que la longueur de grillage nécessaire est $F(x) = 2x + \frac{200}{x}$.

a) Calculer $F(5)$, $F(10)$ et $F(20)$.

b) Montrer que $F(x) - 40 = \frac{2(x-10)^2}{x}$ et en déduire la longueur minimale de grillage ainsi que les dimensions correspondantes.

c) Le grillage coûte 12 € le mètre, auxquels s'ajoute un forfait de pose de 90 €. Exprimer le coût C en fonction de la longueur ℓ de grillage et justifier que le coût augmente avec ℓ .

d) Le budget est de 690 €. Déterminer toutes les valeurs de x possibles.

Bon courage !