

Corrigé et barème – Fonctions : généralités, fonctions affines, carré et inverse — niveau ★★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 2nde

Exercice 1 – Automatismes

(3 pts)

- a) $x^2 - 9 = 0 \iff x^2 = 9 \iff x = -3$ ou $x = 3 : \mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$. (0,5 pt) (0,5)
- b) $(2x - 1)^2 = 25 \iff 2x - 1 = 5$ ou $2x - 1 = -5 \iff x = 3$ ou $x = -2 : \mathcal{S} = \{-2; 3\}$. (0,5 pt) (0,5)
- c) Pour $x \neq -2 : \frac{1}{x+2} = -4 \iff x+2 = -\frac{1}{4} \iff x = -\frac{9}{4}$, qui est bien différent de $-2 : \mathcal{S} = \left\{-\frac{9}{4}\right\}$. (0,5 pt) (0,5)
- d) $a = \frac{1-7}{6-\left(-\frac{9}{2}\right)} = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4} ; f(-2) = \frac{3}{2} + b = 7$ donne $b = \frac{11}{2}$. Donc $f(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{11}{2}$ (contrôle : $f(6) = -\frac{9}{2} + \frac{11}{2} = 1$). (0,5 pt) (0,5)
- e) $x^2 \leq 2 \iff -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} : \mathcal{S} = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$. (0,5 pt) (0,5)
- f) Si $x < 0, \frac{1}{x} < 0 \leq 3$: ils conviennent tous. Si $x > 0$, par décroissance de la fonction inverse, $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{1/3} \iff x \geq \frac{1}{3}$. $\mathcal{S} =]-\infty; 0[\cup \left[\frac{1}{3}; +\infty\right[$. (0,5 pt) (0,5)

Piège — Une inéquation $x^2 \leq k$ (avec $k > 0$) a pour solutions un intervalle centré en 0 : écrire seulement $x \leq \sqrt{k}$ inclurait à tort des nombres comme -5 , dont le carré vaut 25.

Exercice 2 – Démontrer

(4 pts)

- a) Soit $0 < u < v$ et $u > 0$ (car $v > 0, u \geq 0$). Donc $v^2 - u^2 > 0$, soit $v^2 > u^2$. (0,8)
- b) Soit $u < 0$ (produit de deux négatifs). Donc $\frac{1}{v} - \frac{1}{u} < 0$, soit $\frac{1}{v} < \frac{1}{u}$: l'ordre est inversé. (1 pt) (0,8)
- c) Soit $u > 0$. (0,8)
- d) Pour $x > 0 : x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{x^2 - 2x + 1}{x} = \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$ (numérateur carré, dénominateur positif). Égalité si et seulement si $(x-1)^2 = 0$, soit $x = 1$. (0,5 pt) (0,8)
- e) $x^2 - x = x(x-1) < 0$ car $x > 0$ et $x-1 < 0 : x^2 < x$ car les trois facteurs sont positifs : $x < \frac{1}{x}$. (1 pt) (0,8)

Méthode — Pour comparer deux quantités, on étudie le signe de leur différence, qu'on factorise ou qu'on met au même dénominateur : chaque facteur a alors un signe connu.

Exercice 3 – Cordes d’une parabole

(4 pts)

- a) $m = \frac{9-1}{3-(-1)} = \frac{8}{4} = 2$. (0,5 pt) (0,8)
- b) $y = 2x + p$; $A \in (AB)$ donne $1 = -2 + p$, donc $p = 3$: $(AB) : y = 2x + 3$ (contrôle avec $B : 6 + 3 = 9$). (1 pt) (0,8)
- c) $\frac{b^2 - a^2}{b - a} = \frac{(b-a)(b+a)}{b-a} = a + b$, la simplification étant permise car $b - a \neq 0$. (1 pt) (0,8)
- d) Deux droites sont parallèles si elles ont le même coefficient directeur : $-1 + b = 5$, donc $b = 6$ et $N(6; 36)$. (0,5 pt) (0,8)
- e) $x^2 - (2x + 3) = x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$. Sur $] -1; 3[$, $x+1 > 0$ et $x-3 < 0$, donc le produit est strictement négatif : $x^2 < 2x + 3$, la parabole est sous la corde. (1 pt) (0,8)

Astuce — L’identité $b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$ transforme un calcul de pente sur la parabole en une simple somme : le résultat $a + b$ se retient et se réutilise.

Exercice 4 – Pour aller plus loin — Hyperbole et droites

(4 pts)

- a) $\frac{1}{x} + \frac{x}{4} - 1 = \frac{4 + x^2 - 4x}{4x} = \frac{x^2 - 4x + 4}{4x} = \frac{(x-2)^2}{4x}$. (1 pt) (1)
- b) Pour $x > 0$, $(x-2)^2 \geq 0$ et $4x > 0$, donc la différence est positive ou nulle : $\mathcal{H}$ est au-dessus de d . Elle est nulle seulement pour $x = 2$: unique point commun $\left(2; \frac{1}{2}\right)$. (1 pt) (1)
- c) $\frac{1}{x} + \frac{x}{a^2} - \frac{2}{a} = \frac{a^2 + x^2 - 2ax}{a^2x} = \frac{(x-a)^2}{a^2x} \geq 0$ pour $x > 0$, nul si et seulement si $x = a$. Donc $\mathcal{H}$ est au-dessus de d_a , avec un unique point commun $T\left(a; \frac{1}{a}\right)$. (Pour $a = 2$, on retrouve d .) (1 pt) (1)
- d) $P : x = 0$ donne $y = \frac{2}{a}$, donc $P\left(0; \frac{2}{a}\right)$. $Q : y = 0 \iff \frac{x}{a^2} = \frac{2}{a} \iff x = 2a$, donc $Q(2a; 0)$. Milieu : $\left(\frac{0+2a}{2}; \frac{2/a+0}{2}\right) = \left(a; \frac{1}{a}\right) = T$. (1 pt) (1)

Astuce — Traiter d’abord un cas numérique ($a = 2$) guide le calcul général : la même factorisation en carré parfait réapparaît avec a à la place de 2.

Exercice 5 – Problème — Un enclos contre un mur

(5 pts)

- a) L’aire vaut $x \times L = 200$, donc $L(x) = \frac{200}{x}$ (compris entre 4 et 50). Grillage : deux côtés de longueur x et un de longueur L , soit $F(x) = 2x + \frac{200}{x}$. (1 pt) (1)
- b) $F(5) = 10 + 40 = 50$; $F(10) = 20 + 20 = 40$; $F(20) = 40 + 10 = 50$ (en m). (1 pt) (1)
- c) $F(x) - 40 = \frac{2x^2 + 200 - 40x}{x} = \frac{2(x^2 - 20x + 100)}{x} = \frac{2(x-10)^2}{x} \geq 0$ car $x > 0$. Donc $F(x) \geq 40$, avec égalité si et seulement si $x = 10$. Minimum : 40 m de grillage, pour un enclos de 10 m sur 20 m (côté du mur : 20 m). (1,5 pt : 1 pt pour le calcul, 0,5 pt pour la conclusion) (1)
- d) $C(\ell) = 12\ell + 90$: fonction affine de coefficient directeur $12 > 0$, donc croissante. (0,5 pt) (1)
- e) $C(\ell) \leq 690 \iff 12\ell \leq 600 \iff \ell \leq 50$. On résout $F(x) \leq 50$: comme $x > 0$, $2x^2 + 200 \leq 50x \iff 2x^2 - 50x + 200 \leq 0 \iff 2(x-5)(x-20) \leq 0$ (car $(x-5)(x-20) = x^2 - 25x + 100$). Le produit est négatif ou nul entre ses racines : $5 \leq x \leq 20$, intervalle contenu dans $[4; 50]$. Les valeurs possibles sont $x \in [5; 20]$. (1 pt) (1)

Erreur fréquente — Multiplier une inéquation par x n’est permis sans changer le sens que parce que $x > 0$: il faut l’écrire, sinon le raisonnement est incomplet.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).