

Corrigé et barème – Fonctions : généralités, fonctions affines, carré et inverse — niveau ★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 2^{nde}

Exercice 1 – Automatismes

(3 pts)

- a) $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$. (0,5 pt) (0,5)
- b) $\frac{1}{-\frac{5}{3}} = -\frac{3}{5}$. (0,5 pt) (0,5)
- c) Il faut $x - 3 \neq 0$, soit $x \neq 3$: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$. (0,5 pt) (0,5)
- d) $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2 - 4}{3 - (-1)} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$. (0,5 pt) (0,5)
- e) Un carré est toujours positif ou nul, il ne peut valoir -9 : $\mathcal{S} = \emptyset$. (0,5 pt) (0,5)
- f) $\frac{1}{x} = 5 \iff x = \frac{1}{5} = 0,2$: $\mathcal{S} = \{0,2\}$. (0,5 pt) (0,5)

Piège — Une équation $x^2 = k$ avec $k < 0$ n'a aucune solution réelle : inutile de chercher une racine carrée d'un nombre négatif.

Exercice 2 – Qui a raison ?

(4 pts)

- a) Faux. Contre-exemple : $-3 < 1$ mais $(-3)^2 = 9 > 1 = 1^2$. L'implication n'est vraie que pour des nombres positifs. (1 pt) (1)
- b) Faux. $-1 < 1$ et pourtant $\frac{1}{-1} = -1 < 1 = \frac{1}{1}$: l'ordre est conservé. La fonction inverse est décroissante sur $] -\infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$ séparément, pas sur leur réunion. (1 pt) (1)
- c) Faux. Pour $x = 0,5$: $x^2 = 0,25 < 0,5 = x$. En fait $x^2 < x$ (1)
- d) Vrai. $f(x) = x^2 + 4x + 4 - x^2 = 4x + 4$: f est affine de coefficient directeur $4 > 0$, donc croissante sur $\mathbb{R}$. (1 pt : 0,5 pt pour le développement, 0,5 pt pour la conclusion) (1)

Méthode — Un seul contre-exemple suffit pour prouver qu'une affirmation générale est fautive ; pour prouver qu'elle est vraie, il faut un raisonnement valable pour tous les cas.

Exercice 3 – Une parabole et une droite

(4 pts)

- a) $g(x) = 1 \times x + 2$ est de la forme $ax + b$ avec $a = 1$ et $b = 2$: g est affine, et comme $a = 1 > 0$, g est croissante sur $\mathbb{R}$. (0,5 pt) (1)
- b) $(x + 1)(x - 2) = x^2 - 2x + x - 2 = x^2 - x - 2$. (1 pt) (1)
- c) $f(x) = g(x) \iff x^2 - x - 2 = 0 \iff (x + 1)(x - 2) = 0 \iff x = -1$ ou $x = 2$. Avec $f(-1) = 1$ et $f(2) = 4$: les points d'intersection sont $(-1 ; 1)$ et $(2 ; 4)$ (on vérifie : $g(-1) = 1$, $g(2) = 4$). (1 pt) (1)
- d) $f(x) - g(x) = (x + 1)(x - 2)$. $x + 1$ change de signe en -1 , $x - 2$ en 2 . Le produit est positif sur $] -\infty ; -1[$ et sur $]2 ; +\infty[$, négatif sur $] -1 ; 2[$, nul en -1 et 2 . Donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $] -\infty ; -1[\cup]2 ; +\infty[$ et en dessous sur $] -1 ; 2[$. (1,5 pt : 1 pt pour le tableau, 0,5 pt pour l'interprétation) (1)

Méthode — Pour situer deux courbes l'une par rapport à l'autre, on étudie le signe de la différence $f(x) - g(x)$: positif signifie que $\mathcal{C}_f$ est au-dessus.

Exercice 4 – Inéquations et encadrements

(4 pts)

- a) Si $x < 0$, $\frac{1}{x} < 0 < 4$: tous les négatifs conviennent. Si $x > 0$, la fonction inverse est décroissante sur $]0; +\infty[$ et $4 = \frac{1}{0,25}$, donc $\frac{1}{x} < \frac{1}{0,25} \iff x > 0,25$. $\mathcal{S} =]-\infty; 0[\cup]0,25; +\infty[$. (1 pt) (1)
- b) Si $x > 0$, $\frac{1}{x} > 0 > -\frac{1}{3}$: tous les positifs conviennent. Si $x < 0$, $-\frac{1}{3} = \frac{1}{-3}$ et la fonction inverse est décroissante sur $] -\infty; 0[$, donc $\frac{1}{x} > \frac{1}{-3} \iff x < -3$. $\mathcal{S} =]-\infty; -3[\cup]0; +\infty[$. (1 pt) (1)
- c) La fonction inverse est décroissante sur $]0; +\infty[$: $\frac{1}{0,8} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{0,2}$, soit $1,25 \leq \frac{1}{x} \leq 5$. (1 pt) (1)
- d) g est affine de coefficient $-2 < 0$, donc décroissante : $g(0,8) \leq g(x) \leq g(0,2)$, soit $1,4 \leq g(x) \leq 2,6$.
En additionnant membre à membre avec c) : $2,65 \leq g(x) + \frac{1}{x} \leq 7,6$. (1 pt : 0,5 pt par encadrement) (1)

Erreur fréquente — Pour une inéquation avec $\frac{1}{x}$, on sépare toujours les cas $x < 0$ et $x > 0$: la fonction inverse n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$ tout entier.

Exercice 5 – Problème — Le coût d'une affiche

(5 pts)

- a) $C(n) = 0,8n + 60$. C est affine, de coefficient directeur 0,8 (prix d'une affiche) et d'ordonnée à l'origine 60 (forfait). (1 pt) (1)
- b) $C(150) = 0,8 \times 150 + 60 = 120 + 60 = 180$ €. Coût moyen : $\frac{180}{150} = 1,2$ €, soit 1,20 € par affiche. (1 pt) (1)
- c) $M(n) = \frac{0,8n + 60}{n} = \frac{0,8n}{n} + \frac{60}{n} = 0,8 + \frac{60}{n}$. (1 pt) (1)
- d) Soit $n_1 \leq n_2$; en multipliant par $60 > 0$: $\frac{60}{n_1} > \frac{60}{n_2}$; en ajoutant 0,8 : $M(n_1) > M(n_2)$. Donc M est décroissante sur $]0; +\infty[$. (1 pt) (1)
- e) $M(n) < 1 \iff \frac{60}{n} < 0,2 \iff 60 < 0,2n$ (car $n > 0$) $\iff n > 300$. Comme $M(300) = 1$ exactement, il faut commander au moins 301 affiches. (1 pt) (1)

Astuce — Écrire un coût moyen sous la forme « constante + $\frac{k}{n}$ » permet de lire immédiatement son sens de variation grâce à la fonction inverse.