

Corrigé et barème – Fonctions : généralités, fonctions affines, carré et inverse — niveau ★

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 2^{nde}

Exercice 1 – Automatismes

(4 pts)

- a) $f(-6) = (-6)^2 = 36$ et $g(-0,25) = \frac{1}{-0,25} = -4$. (1 pt : 0,5 pt par calcul) (1)
- b) $h(x) = -4x + 7$: coefficient directeur $a = -4$, ordonnée à l'origine $b = 7$. (1 pt) (1)
- c) On résout $7 - 4x = -3$: $-4x = -10$, donc $x = \frac{10}{4} = 2,5$. L'antécédent de -3 par h est $2,5$; vérification : $h(2,5) = 7 - 10 = -3$. (1 pt) (1)
- d) On résout $x^2 = 49$: comme $49 > 0$, il y a deux solutions, $x = -7$ et $x = 7$. Les antécédents de 49 sont -7 et 7 . (1 pt : 0,5 pt si une seule valeur) (1)

Piège — Un nombre strictement positif a toujours deux antécédents par la fonction carré, opposés l'un de l'autre : oublier la valeur négative coûte des points.

Exercice 2 – Lire des variations

(4 pts)

- a) Ligne des x : $-4, 1, 6$. Ligne de f : -3 , flèche montante jusqu'à 5 , puis flèche descendante jusqu'à 2 . (1 pt) (1)
- b) Le maximum est 5 , atteint en $x = 1$. Le minimum est le plus petit des nombres -3 et 2 , c'est-à-dire -3 , atteint en $x = -4$. (1 pt : 0,5 pt par extremum) (1)
- c) 2 et 4 appartiennent à $[1; 6]$ où f est décroissante, et $2 < 4$, donc $f(2) \geq f(4)$ (l'ordre est inversé). (1 pt) (1)
- d) Sur $[-4; 1]$, f croît de -3 à 5 sans lever le crayon : elle prend une fois la valeur 0 . Sur $[1; 6]$, $f(x)$ reste entre 2 et 5 , donc $f(x) > 0$: aucune solution. L'équation a donc exactement une solution. (1 pt) (1)

Méthode — Pour compter les solutions de $f(x) = k$, on examine le tableau de variations intervalle par intervalle et on regarde si k est compris entre les valeurs extrêmes de chacun.

Exercice 3 – Fonction affine et signe

(4 pts)

- a) $f(x) = ax + b$ avec $b = f(0) = 5$ et $a = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{1 - 5}{2} = -2$. Donc $f(x) = -2x + 5$. (1 pt) (1)
- b) Le coefficient directeur $a = -2$ est strictement négatif, donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. (1 pt) (1)
- c) $-2x + 5 = 0 \iff x = \frac{5}{2}$. Comme $a < 0$: $f(x) > 0$ sur $]-\infty; \frac{5}{2}[$, $f\left(\frac{5}{2}\right) = 0$ et $f(x) < 0$ sur $\left]\frac{5}{2}; +\infty\right[$. (1 pt) (1)
- d) $x + 1$ s'annule en -1 , négatif avant, positif après. Tableau : sur $]-\infty; -1[$, produit $(+)(-)$ négatif ; sur $]-1; \frac{5}{2}[$, $(+)(+)$ positif ; sur $\left]\frac{5}{2}; +\infty\right[$, $(-)(+)$ négatif. Donc $\mathcal{S} =]-\infty; -1[\cup \left]\frac{5}{2}; +\infty\right[$ (bornes exclues car l'inégalité est stricte). (1 pt) (1)

Erreur fréquente — Le signe de $ax + b$ « après la racine » est celui de a : avec $a = -2$, l'expression est négative à droite de $\frac{5}{2}$, et non à gauche.

Exercice 4 – Comparer et encadrer**(4 pts)**

- a) $-3,7 < -3,2 \leq 0$ et la fonction carré est décroissante sur $] -\infty ; 0]$: elle inverse l'ordre, donc $(-3,7)^2 > (-3,2)^2$. (1 pt) (1)
- b) $0 < 2,04 < 2,4$ et la fonction inverse est décroissante sur $]0 ; +\infty[$, donc $\frac{1}{2,04} > \frac{1}{2,4}$. (1 pt) (1)
- c) Sur $[1 ; 4] \subset [0 ; +\infty[$, la fonction carré est croissante : elle conserve l'ordre, donc $1 \leq x^2 \leq 16$. (1 pt) (1)
- d) Sur $[-5 ; -2] \subset] -\infty ; 0[$, la fonction inverse est décroissante : $\frac{1}{-2} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{-5}$, soit $-0,5 \leq \frac{1}{x} \leq -0,2$. (1 pt) (1)

Méthode — Avant d'appliquer une fonction à une inégalité, on vérifie sur quel intervalle on se trouve : une fonction croissante conserve l'ordre, une fonction décroissante l'inverse.

Exercice 5 – Problème — Aire et périmètre d'un carré**(4 pts)**

- a) $P(x) = 4x$ et $A(x) = x^2$. P est une fonction linéaire (affine avec $b = 0$) de coefficient 4. (1 pt) (1)
- b) $A(2,5) = 2,5^2 = 6,25 \text{ cm}^2$ et $P(2,5) = 4 \times 2,5 = 10 \text{ cm}$. (1 pt) (1)
- c) $x^2 = 4x \iff x^2 - 4x = 0 \iff x(x - 4) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 4$. Comme $x > 0$, seul $x = 4$ convient : le carré de côté 4 cm a une aire de 16 cm^2 et un périmètre de 16 cm. (1 pt) (1)
- d) $30,25 = 5,5^2$. Pour $x > 0$, la fonction carré est croissante, donc $x^2 \leq 5,5^2 \iff x \leq 5,5$. Avec \$0(1)

Astuce — Dans un problème, la contrainte $x > 0$ simplifie l'inéquation $x^2 \leq k$: sur les positifs, la fonction carré est croissante et on compare directement les côtés.