

Devoir surveillé – Ensembles de nombres, puissances et racines carrées — niveau ★★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 2^{nde}

Nom : _____

Date : _____

Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Automatismes

(3 pts)

- a) Écrire $\frac{(2^3)^{-2} \times 12^4}{6^3 \times 3^{-1}}$ sous forme d'une fraction irréductible.
- b) Écrire $\sqrt{12} \times \sqrt{15} - \sqrt{80} + \frac{10}{\sqrt{5}}$ sous la forme $a\sqrt{5}$.
- c) Sans calculatrice, déterminer $(]-\infty; \sqrt{10}[\cup [\pi; 7]) \cap]3; +\infty[$ (on admet que $3,14 < \pi < 3,15$).

Exercice 2 – Démontrer — L'irrationalité de $\sqrt{3}$

(4 pts)

- a) Soit p un entier qui n'est pas multiple de 3 : il s'écrit $p = 3k + 1$ ou $p = 3k + 2$ avec k entier. Montrer que, dans les deux cas, p^2 n'est pas multiple de 3.
- b) Énoncer la contraposée du résultat de la question a).
- c) Démontrer par l'absurde que $\sqrt{3}$ n'appartient pas à $\mathbb{Q}$.
- d) Montrer que $\frac{1}{2 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$, puis en déduire que $\frac{1}{2 - \sqrt{3}}$ est irrationnel.

Exercice 3 – Ordres de grandeur sans calculatrice

(4 pts)

Dans tout l'exercice, la calculatrice est interdite.

- a) Sachant que $2^{10} = 1\,024$, comparer 2^{100} et 10^{30} .
- b) Comparer 3^{40} et 2^{60} .
- c) Montrer que $1,024^2 < 1,05$, puis que $1,024^{10} < 10$. En déduire le nombre de chiffres de l'écriture décimale de 2^{100} .
- d) Écrire $\sqrt{2^{100}}$ comme une puissance de 2, puis en donner l'ordre de grandeur.

Exercice 4 – Problème — Le format des feuilles A4**(5 pts)**

Une feuille rectangulaire a une longueur L et une largeur ℓ ($L > \ell > 0$). On la coupe en deux parallèlement à sa largeur : on obtient deux rectangles de longueur ℓ et de largeur $\frac{L}{2}$ (on l'admet).

- a) Montrer que ces rectangles ont le même rapport longueur/largeur que la feuille de départ si et seulement si $\frac{L}{\ell} = \sqrt{2}$.
- b) La feuille A0 vérifie $\frac{L}{\ell} = \sqrt{2}$ et a une aire de 1 m^2 . Calculer ℓ^2 et L^2 en valeurs exactes, puis ℓ et L au millimètre près.
- c) La feuille A1 est la moitié de A0, A2 la moitié de A1, etc. Exprimer l'aire de la feuille A_n comme une puissance de 2, puis donner l'aire de A4 en m^2 (notation scientifique) et en cm^2 .
- d) À partir de quel entier n l'aire de A_n devient-elle inférieure à 1 cm^2 ?
- e) Montrer que la diagonale de A0 mesure $\ell\sqrt{3}$, puis en déduire la diagonale d'une feuille A4, au millimètre près.

Exercice 5 – Pour aller plus loin — Écarts entre racines consécutives**(4 pts)**

- a) Montrer que, pour tout entier naturel n , $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$.
- b) En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, $0 < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$.
- c) Déterminer un entier N tel que, pour tout entier $n \geq N$, $|\sqrt{n+1} - \sqrt{n}| < 10^{-2}$.
- d) Calculer $S = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{99} + \sqrt{100}}$ et préciser le plus petit ensemble de nombres auquel S appartient.

Bon courage !