

Corrigé et barème – Ensembles de nombres, puissances et racines carrées — niveau ★★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 2^{nde}

Exercice 1 – Automatismes

(3 pts)

- a) $(2^3)^{-2} = 2^{-6}$ et $12^4 = (2^2 \times 3)^4 = 2^8 \times 3^4$: numérateur $2^2 \times 3^4$. Dénominateur : $2^3 \times 3^3 \times 3^{-1} = 2^3 \times 3^2$. Quotient : $2^{-1} \times 3^2 = \frac{9}{2}$. (1 pt) (1)
- b) $\sqrt{12} \times \sqrt{15} = \sqrt{180} = \sqrt{36 \times 5} = 6\sqrt{5}$; $\sqrt{80} = 4\sqrt{5}$; $\frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}$. Total : $(6 - 4 + 2)\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$. (1 pt) (1)
- c) $3,16^2 = 9,9856 < 10$, donc $\sqrt{10} > 3,16 > 3,15 > \pi$. Les deux intervalles se chevauchent : leur réunion est $] -\infty ; 7]$. L'intersection avec $]3 ; +\infty[$ est $]3 ; 7]$. (1 pt) (1)

Piège — Avant d'écrire la réunion de deux intervalles, il faut vérifier qu'ils se chevauchent : ici tout repose sur la comparaison fine de π et $\sqrt{10}$.

Exercice 2 – Démontrer — L'irrationalité de $\sqrt{3}$

(4 pts)

- a) $(3k+1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$ et $(3k+2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$: dans les deux cas, le reste de la division par 3 est 1, donc p^2 n'est pas multiple de 3. (1 pt) (1)
- b) Contraposée : « si p^2 est multiple de 3, alors p est multiple de 3 » ; elle est vraie car équivalente au résultat de a). (0,5 pt) (1)
- c) Supposons $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$ avec p, q entiers naturels non nuls et la fraction irréductible. Alors $p^2 = 3q^2$: p^2 est multiple de 3, donc p aussi (question b)) ; $p = 3m$, d'où $9m^2 = 3q^2$, soit $q^2 = 3m^2$: q est aussi multiple de 3. La fraction serait simplifiable par 3 : contradiction. Donc $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$. (1,5 pt) (1)
- d) $(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1$, donc $\frac{1}{2 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$. Si $2 + \sqrt{3} = r$ était rationnel, alors $\sqrt{3} = r - 2$ le serait aussi (différence de deux rationnels) : impossible. Donc ce nombre est irrationnel. (1 pt) (1)

Méthode — Un raisonnement par l'absurde se rédige en trois temps : on suppose le contraire, on déduit pas à pas, on aboutit à une contradiction explicite qu'il faut nommer.

Exercice 3 – Ordres de grandeur sans calculatrice

(4 pts)

- a) Chaque question se ramène à des puissances d'exposant commun. (0,8)
- b) $2^{100} = (2^{10})^{10} = 1024^{10}$ et $10^{30} = (10^3)^{10} = 1000^{10}$. Comme $1024 > 1000 > 0$, $2^{100} > 10^{30}$. (1 pt) (0,8)
- c) $3^{40} = (3^4)^{10} = 81^{10}$ et $2^{60} = (2^6)^{10} = 64^{10}$; $81 > 64 > 0$, donc $3^{40} > 2^{60}$. (1 pt) (0,8)
- d) $1,024^2 = 1,048576 < 1,05$. Alors $1,024^{10} = (1,024^2)^5 < 1,05^5 < 2^5$; plus finement $1,05^2 = 1,1025 < 2$, donc $1,05^4 < 4$ et $1,05^5 < 4 \times 1,05 = 4,2 < 10$. Ainsi $2^{100} = 1,024^{10} \times 10^{30}$ avec $1 \leq 1,024^{10} < 10$: $10^{30} \leq 2^{100} < 10^{31}$, donc 2^{100} s'écrit avec 31 chiffres. (1 pt) (0,8)
- e) $\sqrt{2^{100}} = \sqrt{(2^{50})^2} = 2^{50}$. Or $2^{50} = 1024^5 = 1,024^5 \times 10^{15}$ et $1 \leq 1,024^5 < 1,05^3 < 1,2$; l'ordre de grandeur est 10^{15} . (1 pt) (0,8)

Astuce — Pour comparer deux puissances sans les calculer, on les écrit avec le même exposant, puis on compare simplement les bases positives.

Exercice 4 – Problème — Le format des feuilles A4

(5 pts)

- a) Toutes les longueurs sont en mètres et les aires en m². (0,833333)
- b) Rapport des petits rectangles : $\frac{\ell}{L/2} = \frac{2\ell}{L}$. Égalité des rapports : $\frac{2\ell}{L} = \frac{L}{\ell} \iff L^2 = 2\ell^2 \iff \left(\frac{L}{\ell}\right)^2 = 2 \iff \frac{L}{\ell} = \sqrt{2}$ (car $\frac{L}{\ell} > 0$). (1 pt) (0,833333)
- c) $L = \sqrt{2}\ell$ et $L\ell = 1$ donnent $\sqrt{2}\ell^2 = 1$, donc $\ell^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $L^2 = 2\ell^2 = \sqrt{2}$. Ainsi $\ell = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}} \approx 0,841$ m et $L = \sqrt{\sqrt{2}} \approx 1,189$ m. (1 pt) (0,833333)
- d) Chaque découpe divise l'aire par 2 : aire de $A_n = 2^{-n}$ m². Pour A4 : $2^{-4} = \frac{1}{16} = 0,0625 = 6,25 \times 10^{-2}$ m², soit $6,25 \times 10^{-2} \times 10^4 = 625$ cm². (1 pt) (0,833333)
- e) $1 \text{ cm}^2 = 10^{-4} \text{ m}^2$. On veut $2^{-n} < 10^{-4} \iff 2^n > 10\,000$. Or $2^{13} = 8\,192 < 10\,000 < 16\,384 = 2^{14}$: il faut $n \geq 14$ (A14 mesure environ 0,61 cm²). (1 pt) (0,833333)
- f) Pythagore : $d^2 = L^2 + \ell^2 = 2\ell^2 + \ell^2 = 3\ell^2$, donc $d = \ell\sqrt{3} \approx 1,457$ m. Deux découpes divisent les deux dimensions par 2 (A2 : $\frac{L}{2}$ sur $\frac{\ell}{2}$), donc A4 a des dimensions divisées par 4 et une diagonale $\frac{\ell\sqrt{3}}{4} \approx 0,364$ m, soit environ 36,4 cm. (1 pt) (0,833333)

Erreur fréquente — Diviser l'aire par 4 ne divise pas les longueurs par 4 mais par 2 : c'est tous les deux formats que les dimensions sont divisées par 2.

Exercice 5 – Pour aller plus loin — Écarts entre racines consécutives

(4 pts)

- a) $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = (n+1) - n = 1$ et $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} > 0$, donc $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$. (1 pt) (1)
- b) Le quotient $\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ est strictement positif. De plus $n+1 > n$ donne $\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$, donc $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} > 2\sqrt{n} > 0$ et, en passant aux inverses, $\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$. (1 pt) (1)
- c) La différence est positive, donc égale à sa valeur absolue. Il suffit que $\frac{1}{2\sqrt{n}} \leq 10^{-2} \iff 2\sqrt{n} \geq 100 \iff \sqrt{n} \geq 50 \iff n \geq 2\,500$. Avec $N = 2\,500$, pour tout $n \geq N$: $|\sqrt{n+1} - \sqrt{n}| < \frac{1}{2\sqrt{n}} \leq 10^{-2}$. (1 pt) (1)
- d) D'après a), $\frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$. Donc $S = (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{100} - \sqrt{99})$; les termes se compensent deux à deux : $S = \sqrt{100} - \sqrt{1} = 10 - 1 = 9 \in \mathbb{N}$. (1 pt) (1)

Astuce — Rendre rationnel un dénominateur sert aussi à l'envers : transformer une différence de racines en quotient permet d'encadrer, et une somme de quotients peut se simplifier « en cascade ».