

Corrigé et barème – Ensembles de nombres, puissances et racines carrées — niveau ★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 2nde

Exercice 1 – Automatismes

(4 pts)

- a) $9^2 = (3^2)^2 = 3^4$ et $27^{-1} = 3^{-3}$. Donc $\frac{3^4 \times 3^{-5}}{3^{-3}} = \frac{3^{-1}}{3^{-3}} = 3^{-1-(-3)} = 3^2 = 9$. (1 pt) (1)
- b) $\sqrt{98} = \sqrt{49 \times 2} = 7\sqrt{2}$ et $\sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = 4\sqrt{2}$, d'où $7\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$. (1 pt) (1)
- c) $\frac{10}{3\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{3\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{15} = \frac{2\sqrt{5}}{3}$. (1 pt) (1)
- d) $1 < 2 < 4$ donne $1 < \sqrt{2} < 2$; donc $1 \leq \sqrt{2} < 4$ et les réels communs sont ceux de $[1; \sqrt{2}]$: l'intersection vaut $[1; \sqrt{2}]$. (1 pt) (1)

Méthode — Pour manipuler des puissances de bases différentes (9, 27), on réécrit tout avec la même base première avant d'appliquer les règles.

Exercice 2 – Qui a raison ?

(4 pts)

- a) On justifie par un calcul (vrai) ou par un calcul contredisant l'affirmation (faux). (0,8)
- b) Faux. $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, donc $\sqrt{2} + \sqrt{8} = 3\sqrt{2} = \sqrt{18}$, et $\sqrt{18} \neq \sqrt{10}$. La racine d'une somme n'est pas la somme des racines. (1 pt) (0,8)
- c) Faux. $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{-8} = -\frac{1}{8}$. L'exposant négatif donne un inverse, pas un nombre opposé ni un produit. (1 pt) (0,8)
- d) Vrai. Identité $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$: $(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2 = 5 - 3 = 2 \in \mathbb{N}$. (1 pt) (0,8)
- e) Faux. Contre-exemple $x = -4$: $\sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16} = 4 \neq -4$. Pour tout réel x , $\sqrt{x^2} = |x|$. (1 pt) (0,8)

Erreur fréquente — La racine carrée d'un nombre est toujours positive : $\sqrt{x^2}$ vaut $|x|$ et non x dès que x est négatif.

Exercice 3 – Intervalles et encadrements

(4 pts)

- a) $16 < 17 < 25$, donc $4 < \sqrt{17} < 5$. Puis $4,1^2 = 16,81 < 17$ et $4,2^2 = 17,64 > 17$, donc $4,1 < \sqrt{17} < 4,2$. (1 pt) (1,33333)
- b) $2\sqrt{3} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{12}$ et $5 = \sqrt{25}$; comme $12 < 15 < 25$, on a $2\sqrt{3} < \sqrt{15} < 5$. Donc $A \cap B =]\sqrt{15}; 5]$ et $A \cup B = [2\sqrt{3}; +\infty[$. (1,5 pt) (1,33333)
- c) $|x - 4| \leq 1 \iff 3 \leq x \leq 5$: $C = [3; 5]$. Or $3 = \sqrt{9}$ et $9 < 12$, donc $3 < 2\sqrt{3}$: le réel 3 est dans C mais pas dans $A \cup B$. C n'est pas inclus dans $A \cup B$. (1,5 pt) (1,33333)

Astuce — Pour comparer $a\sqrt{b}$ et $\sqrt{c}$ sans calculatrice, on fait « rentrer » le coefficient sous la racine : $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2b}$.

Exercice 4 – Démontrer*(4 pts)*

- a) On multiplie par la quantité conjuguée : $\frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{\sqrt{3}+1}{3-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$. (1 pt) (1)
- b) $E = \frac{\sqrt{3}+1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} = 0,5$: E est décimal (et même pas entier). (1 pt) (1)
- c) $(1 + \sqrt{2})^2 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 = 3 + 2\sqrt{2}$. Comme $1 + \sqrt{2} > 0$, c'est le nombre positif dont le carré vaut $3 + 2\sqrt{2}$: $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$. (1 pt) (1)
- d) $(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5}) = 9 - 5 = 4$ et $2^{-2} = \frac{1}{4}$, donc $F = 4 \times \frac{1}{4} = 1 \in \mathbb{N}$. (1 pt) (1)

Piège — Pour affirmer $\sqrt{a} = b$, il faut vérifier $b^2 = a$ ET $b \geq 0$: oublier le signe peut conduire à une valeur négative, donc fausse.

Exercice 5 – Problème — L'écran d'une montre*(4 pts)*

- a) On travaille en centimètres. (0,8)
- b) Côté $c > 0$ avec $c^2 = 18$: $c = \sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = 3\sqrt{2}$ cm. Diagonale : $d = c\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 3 \times 2 = 6$ cm (Pythagore : $d^2 = 18 + 18 = 36$). (1 pt) (0,8)
- c) Aire d'un pixel : $(5 \times 10^{-3})^2 = 25 \times 10^{-6} = 2,5 \times 10^{-5}$ cm². Nombre : $\frac{18}{2,5 \times 10^{-5}} = 7,2 \times 10^5$ pixels. (1 pt) (0,8)
- d) $7,2 \times 10^5 \times 2 \times 10^{-7} = 14,4 \times 10^{-2} = 1,44 \times 10^{-1}$ W. (1 pt) (0,8)
- e) Garantie : $|c - 3\sqrt{2}| \leq 0,05$. Avec $3\sqrt{2} \approx 4,2426$: $|4,20 - 4,2426| \approx 0,0426 \leq 0,05$. L'écran est conforme. (1 pt) (0,8)

Méthode — Dans un produit en notation scientifique, on multiplie les mantisses entre elles et les puissances de 10 entre elles, puis on réajuste la mantisse entre 1 et 10.