

Corrigé et barème – Ensembles de nombres, puissances et racines carrées — niveau ★

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 2nde

Exercice 1 – Automatismes

(5 pts)

- a) $2^3 \times 2^{-5} = 2^{3+(-5)} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$. (1 pt) (1)
- b) $52\,000 = 5,2 \times 10^4$, donc $52\,000 \times 10^{-7} = 5,2 \times 10^4 \times 10^{-7} = 5,2 \times 10^{-3}$. (1 pt) (1)
- c) $\sqrt{3} \times \sqrt{12} = \sqrt{3 \times 12} = \sqrt{36} = 6$. (1 pt) (1)
- d) $\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$. (1 pt) (1)
- e) -3 est inclus (inégalité large), 1 est exclu (inégalité stricte) : $x \in [-3; 1[$. (1 pt) (1)

Méthode — Pour simplifier $\sqrt{n}$, on cherche le plus grand carré parfait qui divise n (4, 9, 16, 25, 36...) et on le sort de la racine.

Exercice 2 – Quel ensemble ?

(5 pts)

- a) On calcule chaque nombre sous forme simplifiée avant de conclure ; on rappelle que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. (0,833333)
- b) $\sqrt{49} - \sqrt{81} = 7 - 9 = -2$: entier négatif, donc le plus petit ensemble est $\mathbb{Z}$. (1 pt) (0,833333)
- c) $4 \times 5 \times 10^3 \times 10^{-2} = 20 \times 10^1 = 200$: entier naturel, donc $\mathbb{N}$. (1 pt) (0,833333)
- d) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{18}} = \sqrt{\frac{8}{18}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$. Le dénominateur 3 ne se décompose pas avec seulement des 2 et des 5 : $\frac{2}{3}$ n'est pas décimal (0,666...), donc $\mathbb{Q}$. (1 pt) (0,833333)
- e) $\sqrt{2} \times \sqrt{5} = \sqrt{10}$; 10 n'est pas le carré d'un entier ($9 < 10 < 16$), donc $\sqrt{10}$ est irrationnel (résultat admis du cours) : $\mathbb{R}$. (1 pt) (0,833333)
- f) $(2^{-1})^3 = 2^{-3} = \frac{1}{8} = 0,125$: décimal non entier, donc $\mathbb{D}$. (1 pt) (0,833333)

Piège — Un nombre écrit avec une racine ou une fraction n'est pas forcément irrationnel ou non entier : on simplifie toujours avant de conclure, comme $\sqrt{49} - \sqrt{81} = -2$.

Exercice 3 – Intervalles et distances

(5 pts)

- a) On travaille avec $I = [-2; 3]$ et $J =]1; +\infty[$. (1)
- b) $\sqrt{9} = 3$, donc $I = [-2; 3]$. Les réels communs aux deux sont ceux de $]1; 3]$: $I \cap J =]1; 3]$ (1 est exclu car exclu de J). La réunion va de -2 à $+\infty$ sans trou : $I \cup J = [-2; +\infty[$. (1,5 pt) (1)
- c) $4 < 5 < 9$ et la racine carrée conserve l'ordre sur les positifs, donc $2 < \sqrt{5} < 3$. Ainsi $1 < \sqrt{5} \leq 3$: $\sqrt{5} \in I \cap J$. (1 pt) (1)
- d) $10^{-1} = 0,1$. On a $-2 \leq 0,1 \leq 3$, donc $0,1 \in I$; mais $0,1 < 1$, donc $0,1 \notin J$. (1 pt) (1)
- e) $|x - 1|$ est la distance entre x et 1 : $|x - 1| \leq 2 \iff 1 - 2 \leq x \leq 1 + 2 \iff -1 \leq x \leq 3$. $\mathcal{S} = [-1; 3]$. (1,5 pt) (1)

Astuce — Lire $|x - a| \leq r$ comme « la distance de x à a est au plus r » donne directement l'intervalle centré $[a - r; a + r]$.

Exercice 4 – Problème — Un carré de 45 cm²**(5 pts)**

- a) Le côté $c > 0$ vérifie $c^2 = 45$, donc $c = \sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = 3\sqrt{5}$ cm. (1 pt) (1)
- b) Périmètre : $4 \times 3\sqrt{5} = 12\sqrt{5}$ cm. Diagonale (Pythagore) : $d^2 = c^2 + c^2 = 90$, donc $d = \sqrt{90} = \sqrt{9 \times 10} = 3\sqrt{10}$ cm. (1 pt) (1)
- c) $36 < 45 < 49$, donc $\sqrt{36} < \sqrt{45} < \sqrt{49}$, soit $6 < \sqrt{45} < 7$. (1 pt) (1)
- d) $45 \text{ cm}^2 = 45 \times 10^{-4} \text{ m}^2 = 4,5 \times 10^1 \times 10^{-4} \text{ m}^2 = 4,5 \times 10^{-3} \text{ m}^2$. (1 pt) (1)
- e) Aire d'un petit carré : $(10^{-2})^2 = 10^{-4} \text{ cm}^2$. Nombre : $\frac{45}{10^{-4}} = 45 \times 10^4 = 4,5 \times 10^5$ petits carrés. (1 pt) (1)

Erreur fréquente — Diviser par 10^{-4} revient à multiplier par 10^4 : beaucoup d'élèves écrivent 45×10^{-4} et trouvent un nombre de carrés inférieur à 1, ce qui est absurde.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).