

Corrigé et barème – Calcul littéral, équations et inéquations

— niveau ★★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 2^{nde}

Exercice 1 – Calculs longs

(4 pts)

- a) $(x^2 + x - 1)(x^2 + x - 1) = x^4 + x^3 - x^2 + x^3 + x^2 - x - x^2 - x + 1 = x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x + 1$. (1 pt) (1)
- b) $x^4 - 16 = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$; $x^2 + 4 > 0$ ne se factorise pas davantage. (1 pt) (1)
- c) $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$ s'annule pour $x = -3$: valeur interdite -3 . $x^3 - 9x = x(x^2 - 9) = x(x - 3)(x + 3)$, donc pour $x \neq -3$ le quotient vaut $\frac{x(x - 3)}{x + 3}$. (1 pt) (1)
- d) $(x^2 - 4)^2 = (x - 2)^2(x + 2)^2$, donc l'équation équivaut à $(x + 2)^2[(x - 2)^2 - 1] = 0 \iff (x + 2)^2(x - 3)(x - 1) = 0$. $\mathcal{S} = \{-2; 1; 3\}$. (1 pt) (1)

Astuce — Dans une équation, mettre en facteur ce qui est commun aux deux membres évite un développement de degré 4 impossible à exploiter.

Exercice 2 – Démontrer

(4 pts)

- a) $a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2 \geq 0$, donc $a^2 + b^2 \geq 2ab$. (1 pt) (1)
- b) Avec $a = x$ et $b = 1$: $x^2 + 1 \geq 2x$. On divise par $x > 0$ (sens conservé) : $x + \frac{1}{x} \geq 2$. Égalité si et seulement si $(x - 1)^2 = 0$, c'est-à-dire $x = 1$. (1 pt) (1)
- c) $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ avec $a - b \leq 0$ et $a + b \geq 0$: le produit est négatif ou nul, donc $a^2 \leq b^2$. (1 pt) (1)
- d) $(\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 = 8 + 2\sqrt{15}$ et $(\sqrt{15})^2 = 15$. Or $2\sqrt{15} = \sqrt{60} > \sqrt{49} = 7$, donc $8 + 2\sqrt{15} > 15$. Par contraposée de c) (nombres positifs), $\sqrt{3} + \sqrt{5} > \sqrt{15}$. (1 pt) (1)

Méthode — Écrire une différence sous la forme d'un carré est la façon la plus courte de prouver qu'elle est positive.

Exercice 3 – Une inéquation quotient

(4 pts)

- a) Les dénominateurs s'annulent en 2 et en -1 : valeurs interdites -1 et 2. (0,5 pt) (1)
- b) $\frac{1}{x - 2} - \frac{2}{x + 1} = \frac{(x + 1) - 2(x - 2)}{(x - 2)(x + 1)} = \frac{-x + 5}{(x - 2)(x + 1)}$, et (I) équivaut à « cette différence ≥ 0 ». (1 pt) (1)
- c) Valeurs clés : $-1, 2, 5$. $x + 1$ change de signe en -1 , $x - 2$ en 2 (tous deux négatifs puis positifs), $-x + 5$ en 5 (positif puis négatif). Quotient : positif sur $] - \infty; -1[$, négatif sur $] -1; 2[$, positif sur $]2; 5[$, nul en 5, négatif sur $]5; +\infty[$; doubles barres en -1 et 2. (1,5 pt) (1)
- d) $\mathcal{S} =] - \infty; -1[\cup]2; 5[$. (1 pt) (1)

Piège — Pas de produit en croix dans une inéquation : le signe des dénominateurs dépend de x et pourrait inverser le sens sans qu'on le voie.

Exercice 4 – Problème — Une allée dans un jardin

(4 pts)

- a) $A(x) = 600 - (30 - x)(20 - x) = 600 - (600 - 50x + x^2) = 50x - x^2$. (1 pt) (1,33333)
- b) $50x - x^2 = 400 \iff x^2 - 50x + 400 = 0 \iff (x - 25)^2 - 625 + 400 = 0 \iff (x - 25)^2 = 225$, donc $x - 25 = 15$ ou $x - 25 = -15$: $x = 40$ ou $x = 10$. Comme \$0(1,33333)
- c) 16 % de 600 vaut 96. $A(x) \leq 96 \iff x^2 - 50x + 96 \geq 0 \iff (x - 25)^2 - 529 \geq 0 \iff (x - 48)(x - 2) \geq 0$ (car $529 = 23^2$). Sur $]0; 20[$, $x - 48 < 0$; le produit est positif ou nul si et seulement si $x - 2 \leq 0$. Largeurs possibles : $x \in]0; 2]$. (2 pts) (1,33333)

Méthode — Quand un trinôme ne se factorise pas à vue, on fait apparaître un carré, $(x - 25)^2 - 529$, puis on applique $a^2 - b^2$.

Exercice 5 – Pour aller plus loin

(4 pts)

- a) $5x + 1 > 2x - 3 \iff 3x > -4 \iff x > -\frac{4}{3}$. $\mathcal{S} =]-\frac{4}{3}; +\infty[$. (0,5 pt) (0,8)
- b) $1 > 2x - 3 \iff -2x > -4 \iff x < 2$ (division par -2 , sens inversé). $\mathcal{S} =]-\infty; 2[$. (0,5 pt) (0,8)
- c) $(I_m) \iff (m - 2)x > -4$. Si $m > 2$: $x > -\frac{4}{m - 2}$. Si $m < 2$: on divise par $m - 2 < 0$, $x < \frac{4}{2 - m}$. Si $m = 2$: $0 \times x > -4$ est toujours vrai, $\mathcal{S} = \mathbb{R}$. (1,5 pt) (0,8)
- d) Il faut $m < 2$ et $\frac{4}{2 - m} = 1 \iff 2 - m = 4 \iff m = -2$. Vérification : $-4x > -4 \iff x < 1$. (1 pt) (0,8)
- e) Non : d'après c), l'ensemble des solutions est une demi-droite si $m \neq 2$ et $\mathbb{R}$ si $m = 2$; il n'est jamais vide. (0,5 pt) (0,8)

Erreur fréquente — Diviser par $m - 2$ sans connaître son signe est une faute : on sépare les cas $m > 2$, $m < 2$ et $m = 2$, ce dernier étant souvent oublié.