

Corrigé et barème – Calcul littéral, équations et inéquations

— niveau ★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 2nde

Exercice 1 – Automatismes

(4 pts)

- a) $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$ et $(2x-1)(x+5) = 2x^2 + 9x - 5$, donc l'expression vaut $x^2 + 6x + 9 - 2x^2 - 9x + 5 = -x^2 - 3x + 14$. (1 pt) (1)
- b) $(2x+1)^2 - 4^2 = (2x+1-4)(2x+1+4) = (2x-3)(2x+5)$. (1 pt) (1)
- c) On multiplie par 6 : $3(3x-1) - 2(x+2) = 6 \iff 9x-3-2x-4=6 \iff 7x=13 \iff x = \frac{13}{7}$. $\mathcal{S} = \left\{ \frac{13}{7} \right\}$. (1 pt) (1)
- d) $5-2x < 3x-15 \iff 20 < 5x \iff x > 4$. $\mathcal{S} =]4; +\infty[$. (1 pt) (1)

Erreur fréquente — Un signe « - » devant un produit porte sur tout le développement : on développe d'abord entre parenthèses, puis on change tous les signes.

Exercice 2 – Qui a raison ?

(4 pts)

- a) Faux : on divise par $-4 < 0$, donc le sens de l'inégalité change : $x \geq -3$, $\mathcal{S} = [-3; +\infty[$. (1 pt) (1)
- b) Faux (incomplet) : $(x+1)^2 = 9 \iff x+1 = 3$ ou $x+1 = -3$, donc $x = 2$ ou $x = -4$; $\mathcal{S} = \{-4; 2\}$. (1 pt) (1)
- c) Faux : pour $x = 2$ le quotient n'est pas défini. Pour $x \neq 2$, $\frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2$: l'égalité est vraie seulement pour tout $x \neq 2$. (1 pt) (1)
- d) Faux : contre-exemple $a = -3$, $b = 1$: $a^2 = b^2$. La propriété n'est vraie que pour des nombres positifs. (1 pt) (1)

Piège — L'équation $X^2 = 9$ a deux solutions, 3 et -3 : oublier la racine négative fait perdre la moitié des solutions.

Exercice 3 – Équation et inéquation quotient

(4 pts)

- a) Valeur interdite : 1. Pour $x \neq 1$: $\frac{2x+3}{x-1} = 3 \iff 2x+3 = 3x-3 \iff x = 6$, et $6 \neq 1$. $\mathcal{S} = \{6\}$. (1 pt) (1)
- b) $R(x) - 3 = \frac{2x+3-3(x-1)}{x-1} = \frac{2x+3-3x+3}{x-1} = \frac{-x+6}{x-1}$. (1 pt) (1)
- c) $-x+6$: positif avant 6, négatif après ; $x-1$: négatif avant 1, positif après. Quotient : négatif sur $] -\infty; 1[$, double barre en 1, positif sur $]1; 6[$, nul en 6, négatif sur $]6; +\infty[$. (1 pt) (1)
- d) $R(x) \geq 3 \iff R(x) - 3 \geq 0$, donc $\mathcal{S} =]1; 6]$. (1 pt) (1)

Méthode — Pour comparer un quotient à un nombre, on passe tout du même côté et on réduit au même dénominateur : on se ramène au signe d'un quotient.

Exercice 4 – Problème — Le bénéfice d'un atelier*(4 pts)*

- a) $(x - 2)(10 - x) = 10x - x^2 - 20 + 2x = -x^2 + 12x - 20 = B(x)$. (1 pt) (1)
- b) $16 - (x^2 - 12x + 36) = -x^2 + 12x - 20 = B(x)$. Comme $(x - 6)^2 \geq 0$, $B(x) \leq 16$, avec égalité pour $x = 6$: bénéfice maximal 16 000 euros pour 600 objets. (1 pt) (1)
- c) $x - 2$ s'annule en 2 (négatif avant, positif après), $10 - x$ s'annule en 10 (positif avant, négatif après). Sur $[0; 12]$: $B(x) < 0$ sur $[0; 2[$, $B(x) > 0$ sur $]2; 10[$, $B(x) < 0$ sur $]10; 12]$. Bénéfice positif pour une production strictement comprise entre 200 et 1 000 objets. (1 pt) (1)
- d) $B(x) = 12 \iff 16 - (x - 6)^2 = 12 \iff (x - 6)^2 = 4 \iff x - 6 = 2$ ou $x - 6 = -2$, soit $x = 8$ ou $x = 4$ (tous deux dans $[0; 12]$) : 400 ou 800 objets. (1 pt) (1)

Astuce — La forme $16 - (x - 6)^2$ donne à la fois le maximum et la résolution de $B(x) = 12$ en se ramenant à une équation du type $X^2 = a$.

Exercice 5 – Une parabole et une droite*(4 pts)*

- a) $f(x) - g(x) = x^2 - 2x + 1 - x - 5 = x^2 - 3x - 4$ et $(x + 1)(x - 4) = x^2 - 4x + x - 4 = x^2 - 3x - 4$: égalité vérifiée. (1 pt) (1)
- b) $f(x) = g(x) \iff (x + 1)(x - 4) = 0 \iff x = -1$ ou $x = 4$. $g(-1) = 4$ et $g(4) = 9$: points $(-1; 4)$ et $(4; 9)$. (1 pt) (1)
- c) $(x + 1)(x - 4) < 0$: le produit est négatif entre ses racines, donc $\mathcal{S} =]-1; 4[$. Sur cet intervalle, la parabole est strictement au-dessous de la droite. (1 pt) (1)
- d) $(x - 1)^2 - 9 \geq 0 \iff (x - 1 - 3)(x - 1 + 3) \geq 0 \iff (x - 4)(x + 2) \geq 0$. Tableau de signes : positif hors des racines -2 et 4 . $\mathcal{S} =]-\infty; -2] \cup [4; +\infty[$. (1 pt) (1)

Méthode — La position relative de deux courbes se lit sur le signe de la différence $f(x) - g(x)$, qu'on factorise pour dresser un tableau de signes.