Colinéarité et déterminant

Fiche méthode

(Mathématiques 2nde · Géométrie · Vecteurs et problèmes de géométrie)

La démarche face à une question de colinéarité

1. Je traduis la question en vecteurs : alignement de A, B, C → $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$; parallélisme de (AB) et (CD) → $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$; décomposition → une base de deux vecteurs non colinéaires.

2. Je calcule les coordonnées des vecteurs : extrémité moins origine.

3. Je calcule le déterminant $xy' - yx'$ (ou je cherche k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$).

4. Je conclus par une phrase qui cite la propriété : « le déterminant est nul, donc les vecteurs sont colinéaires, donc les points sont alignés ».

Le réflexe — déterminant nul $\iff$ vecteurs colinéaires ; la conclusion nomme les vecteurs, puis les points ou les droites.

Cas 1 · Vecteurs colinéaires

Réflexe — je cherche k avec une coordonnée non nulle, puis je le vérifie sur l'autre.

Exemple. Questions types : « Les vecteurs sont-ils colinéaires ? », « Trouver k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$ ». Exemple : $\vec{u}\,(4\,;-10)$ et $\vec{v}\,(-2\,;5)$.

L'abscisse donne $-2 = 4k$, soit $k = -0{,}5$.

Ordonnée : $(-0{,}5) \times (-10) = 5$, c'est bien l'ordonnée de $\vec{v}$.

Donc $\vec{v} = -0{,}5\,\vec{u}$: colinéaires, de sens contraires.

Attention — un seul quotient ne prouve rien ; et ne pas diviser par une coordonnée nulle.

Cas 2 · Déterminant

Réflexe — deux colonnes, x × y′ − y × x′, négatifs entre parenthèses.

Exemple. Questions types : « Calculer det(u⃗, v⃗) », « Démontrer que… sont (ou ne sont pas) colinéaires ». Exemple : $\vec{u}\,(-3\,;8)$ et $\vec{v}\,(2\,;-5)$.

$\det(\vec{u},\vec{v}) = (-3) \times (-5) - 8 \times 2 = 15 - 16 = -1$.

Le déterminant n'est pas nul : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

Attention — xy′ − yx′, pas xx′ − yy′ ; déterminant nul = colinéaires, pas égaux.

Cas 3 · Alignement

Réflexe — $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ (même origine), déterminant, « colinéaires, donc alignés ».

Exemple. Questions types : « Les points sont-ils alignés ? », « Trouver la coordonnée manquante ». Exemple : $A(2\,;-1)$, $B(5\,;1)$, $C(-7\,;-7)$.

$\overrightarrow{AB}\,(3\,;2)$ et $\overrightarrow{AC}\,(-9\,;-6)$.

$\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = 3 \times (-6) - 2 \times (-9) = -18 + 18 = 0$.

Les vecteurs sont colinéaires, donc A, B et C sont alignés.

Attention — une figure ne prouve pas un alignement ; $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ colinéaires donne un parallélisme.

Cas 4 · Parallélisme

Réflexe — un vecteur par droite ; puis un point testé si l'on veut savoir « confondues ou non ».

Exemple. Questions types : « Les droites sont-elles parallèles ? », « Nature du quadrilatère ». Exemple : $K(-1\,;2)$, $L(3\,;0)$, $M(0\,;5)$, $N(10\,;0)$.

$\overrightarrow{KL}\,(4\,;-2)$ et $\overrightarrow{MN}\,(10\,;-5)$.

$\det(\overrightarrow{KL},\overrightarrow{MN}) = 4\times(-5)-(-2)\times 10 = -20+20 = 0$.

Les vecteurs sont colinéaires, donc $(KL)\parallel(MN)$.

Attention — parallèles $\neq$ même longueur ; une paire de côtés parallèles donne un trapèze.

Cas 5 · Combinaison de deux vecteurs

Réflexe — base de deux vecteurs non colinéaires, Chasles, puis comparaison des coefficients.

Exemple. Questions types : « Exprimer en fonction de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ », « En déduire que… sont alignés ». Exemple : ABC triangle, $\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$.

Or $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, donc $\overrightarrow{BP} = -2\overrightarrow{BC}$.

Colinéaires : B, P et C sont alignés.

Attention — l'écriture $a\vec{u} + b\vec{v}$ n'est unique que si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

Les pièges

- $\det(\vec{u},\vec{v}) = xy' - yx'$: mettre les négatifs entre parenthèses, $(-2)\times(-3) = 6$.
- Un déterminant nul veut dire « colinéaires », pas « égaux » ni « de même sens ».
- Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.
- Alignement : deux vecteurs de même origine ($\vec{AB}$ et $\vec{AC}$).
- Parallèles comprend confondues : tester un point pour trancher.
- Échanger les vecteurs change le signe du déterminant, pas sa nullité.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).