Devoir surveillé – Colinéarité et déterminant

Vecteurs colinéaires, déterminant dans une base orthonormée et critère de colinéarité démontré, alignement de trois points, parallélisme de deux droites, vecteur écrit comme combinaison de deux vecteurs non colinéaires.

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 2nde

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Automatismes ★★ *(4 pts)*

Le plan est muni d'une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$. Répondre en justifiant brièvement.

a) Calculer $\det(\vec{u}, \vec{v})$ pour $\vec{u}\,(-2\,;7)$ et $\vec{v}\,(3\,;1)$. Ces vecteurs sont-ils colinéaires ?

b) $\vec{u}\,(8\,;-6)$ et $\vec{v}\,(-2\,;1{,}5)$. Trouver le réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

c) Donner les coordonnées du vecteur $3(\vec{i} - 2\vec{j}) + 5\vec{j}$.

d) Déterminer le réel t pour que $\vec{p}\,(2t+1\,;3)$ et $\vec{q}\,(5\,;-2)$ soient colinéaires.

Exercice 2 – Démonstration du cours ★★ *(4 pts)*

Dans une base orthonormée, on considère deux vecteurs non nuls $\vec{u}\,(x\,;y)$ et $\vec{v}\,(x'\,;y')$.

a) Démontrer que si $\vec{v} = k\vec{u}$ pour un réel k, alors $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

b) On suppose $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ et $x \neq 0$. En posant $k = \dfrac{x'}{x}$, démontrer que $\vec{v} = k\vec{u}$.

c) Application : $\vec{u}\,(-5\,;2)$ et $\vec{v}\,(3\,;-1{,}2)$. Calculer $\det(\vec{u}, \vec{v})$ et donner k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

d) $\vec{u}\,(0\,;4)$ et $\vec{v}\,(0\,;-3)$: on ne peut pas poser $k = \dfrac{x'}{x}$. Montrer quand même qu'ils sont colinéaires et donner k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

Exercice 3 – Alignement ★★ *(4 pts)*

Dans un repère orthonormé, on donne $A(-3\,;2)$, $B(1\,;4)$, $C(13\,;10)$ et $D(5\,;7)$.

a) Démontrer que les points A, B et C sont alignés.

b) Déterminer le réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$. Lequel des trois points est entre les deux autres ?

c) Le point D appartient-il à la droite (AB) ? Justifier.

d) Déterminer le réel x pour que le point $E(x\,;-1)$ appartienne à la droite (AB).

Exercice 4 – Parallélisme ★★★ *(4 pts)*

Dans un repère orthonormé, on donne $A(-3\,;1)$, $B(3\,;-2)$, $C(5\,;2)$ et $D(1\,;4)$.

a) Démontrer que les droites (AB) et (DC) sont parallèles.

b) Les droites (AD) et (BC) sont-elles parallèles ? Justifier par un calcul.

c) Déterminer le réel y pour que la droite (CF), avec $F(7\,;y)$, soit parallèle à (AD).

d) Montrer que $G(9\,;0)$ appartient à la droite (DC), puis que les droites (CG) et (AB) sont strictement parallèles.

Exercice 5 – Combinaison de deux vecteurs ★★★ *(4 pts)*

Partie A : dans une base orthonormée, $\vec{u}\,(3\,;-1)$, $\vec{v}\,(2\,;0)$ et $\vec{w}\,(-4\,;3)$. Partie B : $ABCD$ est un parallélogramme, M est le milieu de $[BC]$ et N est le point tel que $\overrightarrow{AN} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AM}$.

a) Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

b) Déterminer les réels a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

c) Exprimer $\overrightarrow{AN}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

d) En déduire que les points B, N et D sont alignés.

Bon courage !

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).