Corrigé et barème – Colinéarité et déterminant

Vecteurs colinéaires, déterminant dans une base orthonormée et critère de colinéarité démontré, alignement de trois points, parallélisme de deux droites, vecteur écrit comme combinaison de deux vecteurs non colinéaires.

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 2nde

Exercice 1 – Automatismes ★★ *(4 pts)*

a) $\det(\vec{u},\vec{v}) = (-2)\times 1 - 7\times 3 = -2 - 21 = -23 \neq 0$: les vecteurs ne sont pas colinéaires. (1)

b) L'abscisse donne $-2 = 8k$, soit $k = -0{,}25$. Contrôle sur l'ordonnée : $(-0{,}25)\times(-6) = 1{,}5$. Donc $\vec{v} = -0{,}25\,\vec{u}$. (1)

c) $3\vec{i} - 6\vec{j} + 5\vec{j} = 3\vec{i} - \vec{j}$: le vecteur a pour coordonnées $(3\,;-1)$. (1)

d) $\det(\vec{p},\vec{q}) = (2t+1)\times(-2) - 3\times 5 = -4t - 2 - 15 = -4t - 17$. Il est nul si et seulement si $t = -\dfrac{17}{4}$. (1)

Repère — Un déterminant se calcule en colonnes : x × y′ − y × x′, avec des parenthèses autour des nombres négatifs.

Exercice 2 – Démonstration du cours ★★ *(4 pts)*

a) Si $\vec{v} = k\vec{u}$, alors $x' = kx$ et $y' = ky$. Donc $\det(\vec{u},\vec{v}) = xy' - yx' = x\times ky - y\times kx = kxy - kxy = 0$. (1)

b) Avec $k = \dfrac{x'}{x}$, on a $x' = kx$. Comme $xy' - yx' = 0$, on a $xy' = yx'$, et en divisant par $x \neq 0$: $y' = y\times\dfrac{x'}{x} = ky$. Les coordonnées de $\vec{v}$ sont $(kx\,;ky)$: $\vec{v} = k\vec{u}$, les vecteurs sont colinéaires. (1)

c) $\det(\vec{u},\vec{v}) = (-5)\times(-1{,}2) - 2\times 3 = 6 - 6 = 0$: colinéaires. $k = \dfrac{3}{-5} = -0{,}6$, et $-0{,}6\times 2 = -1{,}2$: $\vec{v} = -0{,}6\,\vec{u}$. (1)

d) $\det(\vec{u},\vec{v}) = 0\times(-3) - 4\times 0 = 0$: les vecteurs sont colinéaires. On raisonne sur l'ordonnée, non nulle : $-3 = k\times 4$ donne $k = -\dfrac{3}{4}$, et $-\dfrac{3}{4}\times 0 = 0$. Donc $\vec{v} = -\dfrac{3}{4}\vec{u}$. (1)

Méthode — Pour trouver k, on divise par une coordonnée NON nulle de u⃗ ; si l'abscisse est nulle, on utilise l'ordonnée.

Exercice 3 – Alignement ★★ *(4 pts)*

a) $\overrightarrow{AB}\,(4\,;2)$ et $\overrightarrow{AC}\,(16\,;8)$. $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = 4\times 8 - 2\times 16 = 32 - 32 = 0$. Les vecteurs sont colinéaires, donc A, B et C sont alignés. (1)

b) $16 = 4\times 4$ et $8 = 4\times 2$: $\overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AB}$. Comme $4 > 1$, B est entre A et C. (1)

c) $\overrightarrow{AD}\,(8\,;5)$ et $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}) = 4\times 5 - 2\times 8 = 20 - 16 = 4 \neq 0$. Les vecteurs ne sont pas colinéaires : D n'appartient pas à (AB). (1)

d) $\overrightarrow{AE}\,(x+3\,;-3)$. $E \in (AB) \iff 4\times(-3) - 2(x+3) = 0 \iff -2x - 18 = 0 \iff x = -9$. Contrôle : $\overrightarrow{AE}\,(-6\,;-3) = -1{,}5\,\overrightarrow{AB}$. (1)

Piège — Pour un alignement, les deux vecteurs partent du même point : AB⃗ et AC⃗, pas AB⃗ et CD⃗.

Exercice 4 – Parallélisme ★★★ *(4 pts)*

a) $\overrightarrow{AB}\,(6\,;-3)$ et $\overrightarrow{DC}\,(4\,;-2)$: $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}) = 6\times(-2)-(-3)\times 4 = -12+12 = 0$. Les vecteurs sont colinéaires, donc $(AB)\parallel(DC)$. (1)

b) $\overrightarrow{AD}\,(4\,;3)$ et $\overrightarrow{BC}\,(2\,;4)$: $\det(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC}) = 4\times 4-3\times 2 = 16-6 = 10\neq 0$. Les droites (AD) et (BC) ne sont pas parallèles. (1)

c) $\overrightarrow{CF}\,(2\,;y-2)$ et $\overrightarrow{AD}\,(4\,;3)$. $(CF)\parallel(AD) \iff 2\times 3-(y-2)\times 4=0 \iff 14-4y=0 \iff y = 3{,}5$. (1)

d) $\overrightarrow{DG}\,(8\,;-4)$ et $\det(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DG}) = 4\times(-4)-(-2)\times 8 = -16+16 = 0$: $G\in(DC)$, donc (CG) est la droite (DC), parallèle à (AB). De plus $\overrightarrow{AC}\,(8\,;1)$ et $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = 6\times 1-(-3)\times 8 = 6+24 = 30\neq 0$: $C\notin(AB)$. Les droites sont parallèles sans point commun : strictement parallèles. (1)

Repère — « Parallèles » inclut « confondues » : pour trancher, on teste si un point de l'une est sur l'autre.

Exercice 5 – Combinaison de deux vecteurs ★★★ *(4 pts)*

a) $\det(\vec{u},\vec{v}) = 3\times 0-(-1)\times 2 = 2\neq 0$: $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, donc $\vec{w}$ s'écrit de façon unique $a\vec{u}+b\vec{v}$. (1)

b) $a\vec{u}+b\vec{v}$ a pour coordonnées $(3a+2b\,;-a)$. L'ordonnée donne $-a=3$, donc $a=-3$. L'abscisse donne $-9+2b=-4$, donc $b=2{,}5$. Ainsi $\vec{w}=-3\vec{u}+2{,}5\,\vec{v}$. (1)

c) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, et $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$ car $ABCD$ est un parallélogramme. Donc $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AN} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}$. (1)

d) $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD} = -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}$. Or $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$. Donc $\overrightarrow{BN} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BD}$: les vecteurs sont colinéaires et B, N, D sont alignés (N est sur la diagonale $[BD]$, au tiers en partant de B). (1)

Méthode — Sans repère : une base de deux vecteurs non colinéaires de la figure, la relation de Chasles, puis on compare les coefficients.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).