Arithmétique

Fiche méthode

(Mathématiques 2nde · Nombres et calculs · Arithmétique)

La démarche pour une question d'arithmétique

1. Je traduis avec des lettres : multiple de $n \to nk$; pair $\to 2k$; impair $\to 2k+1$ ($k \in \mathbb{Z}$, une lettre par nombre).

2. Je calcule : je développe et je réduis.

3. Je fais apparaître la forme voulue : $n \times K$, $2K$ ou $2K+1$.

4. Je justifie que K est un entier, puis je conclus par une phrase.

Le réflexe — la phrase « K est un entier » doit être écrite : c'est elle qui fait d'un calcul une démonstration.

Cas 1 · Multiple ou diviseur ?

Réflexe — j'écris a = b × k avec k entier ; pour un « non », je donne le reste ou deux multiples consécutifs ; pour lister les diviseurs, je cherche les paires et je m'arrête quand d × d dépasse a.

Exemple. Questions types : « a est-il un multiple de b ? », « Lister les diviseurs positifs de a ». Exemple : diviseurs positifs de 63.

$63 = 1 \times 63 = 3 \times 21 = 7 \times 9$.

2, 4, 5 et 6 ne divisent pas 63, et $8 \times 8 = 64 > 63$: on s'arrête.

Diviseurs positifs de 63 : 1, 3, 7, 9, 21, 63.

Attention — « 6 divise 42 » : c'est 42 qui est le multiple de 6.

Cas 2 · Montrer qu'une expression est un multiple de n

Réflexe — je développe, je mets n en facteur, j'écris « K est un entier » ; pour une affirmation fausse, un contre-exemple.

Exemple. Questions types : « Montrer que … est un multiple de 3 pour tout entier n », « Montrer que la somme de deux multiples de n est un multiple de n ». Exemple : $6n + 9$.

Soit $n \in \mathbb{Z}$. $6n + 9 = 3 \times 2n + 3 \times 3 = 3(2n + 3)$.

$K = 2n + 3$ est un entier.

Donc $6n + 9$ est un multiple de 3 pour tout entier n.

Attention — vérifier sur trois valeurs ne prouve rien ; un seul contre-exemple prouve qu'une affirmation est fausse.

Cas 3 · Pair ou impair

Réflexe — n = 2k ou n = 2k + 1 ; je calcule ; je fais apparaître 2K ou 2K + 1 avec K entier ; « pour tout n » : deux cas.

Exemple. Questions types : « Déterminer la parité de … », « Montrer que … est pair pour tout entier n ». Exemple : $4n^2 + 4n + 3$.

Soit $n \in \mathbb{Z}$. $4n^2 + 4n + 3 = 4n^2 + 4n + 2 + 1 = 2(2n^2 + 2n + 1) + 1$.

$K = 2n^2 + 2n + 1$ est un entier.

Donc $4n^2 + 4n + 3$ est impair pour tout entier n.

Attention — deux nombres différents s'écrivent avec deux lettres différentes (2k + 1 et 2p + 1).

Cas 4 · Rendre une fraction irréductible

Réflexe — je décompose en facteurs premiers, je simplifie par tous les facteurs communs, je vérifie qu'il n'en reste aucun.

Exemple. Questions types : « Écrire sous forme irréductible », « Calculer et donner le résultat sous forme irréductible ». Exemple : $\dfrac{198}{308}$.

$198 = 2 \times 3^2 \times 11$ et $308 = 2^2 \times 7 \times 11$.
Facteurs communs : $2 \times 11 = 22$. $\dfrac{198}{308} = \dfrac{9}{14}$.
$9 = 3^2$ et $14 = 2 \times 7$ n'ont aucun facteur commun : $\dfrac{9}{14}$ est irréductible.

Attention — on simplifie des facteurs, jamais les termes d'une somme.

Les pièges

- « b divise a » veut dire « a est un multiple de b », et non l'inverse.
- 0 est pair et c'est un multiple de tout entier ; on ne divise jamais par 0.
- Un multiple de 4 et de 10 n'est pas forcément un multiple de 40 (exemple : 20).
- La même lettre k pour deux nombres différents revient à supposer qu'ils sont égaux.
- Une simplification incomplète n'est pas une forme irréductible : vérifier qu'il ne reste aucun facteur commun.
- Un multiple peut être négatif : k est un entier relatif.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).