

Corrigé et barème – Arithmétique : multiples, diviseurs, nombres pairs et impairs

Notations $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$, multiples et diviseurs, nombres pairs et impairs, fraction irréductible, démonstrations au programme (somme de multiples, carré d'un impair) — thème Nombres et calculs

Durée : 90 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · 2^{nde}

Exercice 1 – Multiples, diviseurs et nombres premiers

(4 pts)

- a) $29 \times 31 = 899$ avec $31 \in \mathbb{Z}$: **oui**, 899 est un multiple de 29. (1)
- b) $110 = 1 \times 110 = 2 \times 55 = 5 \times 22 = 10 \times 11$; $\sqrt{110} \approx 10,5$ et 3, 4, 6, 7, 8, 9 ne divisent pas 110 : **1, 2, 5, 10, 11, 22, 55, 110**. (1)
- c) $\sqrt{257} \approx 16,03$: on teste les premiers 2, 3, 5, 7, 11, 13. 257 est impair, $2 + 5 + 7 = 14$, pas de 0 ni 5, $257 = 7 \times 36 + 5 = 11 \times 23 + 4 = 13 \times 19 + 10$: **257 est premier**. (1)
- d) $7 \times 285 = 1995$ et $2000 - 1995 = 5$: le reste vaut 5, donc **7 ne divise pas 2 000**. (1)

Erreur fréquente — Pour affirmer qu'un nombre est premier, il faut tester tous les nombres premiers jusqu'à sa racine carrée, pas seulement 2, 3 et 5.

Exercice 2 – Fractions irréductibles

(4 pts)

- a) $693 = 3 \times 231 = 3^2 \times 77$, donc $693 = 3^2 \times 7 \times 11$. (1)
- b) $858 = 2 \times 429 = 2 \times 3 \times 143$, donc $858 = 2 \times 3 \times 11 \times 13$. (1)
- c) Facteurs communs : $3 \times 11 = 33$. $\frac{693}{858} = \frac{3 \times 7}{2 \times 13} = \frac{21}{26}$; 21 = 3 × 7 et 26 = 2 × 13 sans facteur commun : $\frac{21}{26}$. (1)
- d) $B = \frac{21}{26} + \frac{10}{26} = \frac{31}{26}$; 31 est premier et ne divise pas 26 : $B = \frac{31}{26}$. (1)

À retenir — Une fraction n'est irréductible que lorsque numérateur et dénominateur n'ont plus aucun facteur premier commun : la décomposition le garantit.

Exercice 3 – Parité

(4 pts)

- a) $14n + 9 = 2(7n + 4) + 1$ avec $7n + 4$ entier : **impair**. (1)
- b) $a = 2k$, $b = 2p + 1$ ($k, p \in \mathbb{Z}$) : $a + b = 2(k + p) + 1$ avec $k + p$ entier : $a + b$ est **impair**. (1)
- c) $(2n + 1)^2 + (2n + 3)^2 = 8n^2 + 16n + 10 = 2(4n^2 + 8n + 5)$: **pair**. Et $= 4(2n^2 + 4n + 2) + 2$: si c'était $4m$, on aurait $4(m - 2n^2 - 4n - 2) = 2$, impossible car 2 n'est pas multiple de 4 : **jamais multiple de 4**. (1)
- d) Il n'a testé que des impairs ; des exemples ne prouvent rien. Contre-exemple : $n = 2$ donne $2^2 + 3 = 7$, impair : **l'affirmation est fausse**. (1)

Attention — Vérifier sur quelques valeurs ne démontre rien, et des valeurs toutes de même parité peuvent masquer le contre-exemple.

Exercice 4 – Démonstrations du cours**(4 pts)**

- a) $a = 9k, b = 9k'$ avec $k, k' \in \mathbb{Z} : a + b = 9(k + k')$ et $k + k'$ est entier : $a + b$ est un multiple de 9. (1)
- b) $n = 2k + 1 : n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ avec $2k^2 + 2k$ entier : n^2 est impair. (1)
- c) Si n était impair, n^2 serait impair d'après b), ce qui contredit l'hypothèse : n est pair. (1)
- d) D'après c), $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$, donc $n^2 = 4k^2 : n^2$ est un multiple de 4. (1)

Le point clé — Chaque hypothèse se traduit par une écriture littérale avec une lettre propre ($9k$ et $9k'$, jamais deux fois $9k$).

Exercice 5 – Bouquets de fleurs**(4 pts)**

- a) $90 = 2 \times 3^2 \times 5$ et $225 = 3^2 \times 5^2$. (1)
- b) $90 = 15 \times 6$ et $225 = 15 \times 15$: **oui**, 15 bouquets de **6 roses et 15 tulipes**. (1)
- c) Le nombre de bouquets divise 90 et 225 ; le plus grand diviseur commun est $3^2 \times 5 = 45$: **45 bouquets** de $\frac{90}{45} = 2$ roses et $\frac{225}{45} = 5$ tulipes. (1)
- d) $30 = 2 \times 3 \times 5$ ne divise pas 225, qui est impair ($\frac{225}{30} = 7,5$) : les tulipes ne se répartissent pas, **30 bouquets est impossible**. (1)

Repère — Un partage équitable sans reste impose un diviseur commun ; le plus grand se lit sur les facteurs premiers communs, avec leur plus petit exposant.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).