Variables aléatoires réelles

Fiche méthode

(Spécialité maths 1re · Probabilités · Variables aléatoires)

La démarche face à une variable aléatoire

1. Je définis X et je liste ses valeurs possibles (gain brut ou net, nombre de succès, coût).

2. J'établis la loi : issues équiprobables ou arbre pondéré, regroupement des issues de même valeur, tableau, contrôle « somme = 1 ».

3. Je calcule $E(X)$, puis $E(X^2)$ et $V(X)$ par König-Huygens, puis $\sigma(X)$; pour $aX+b$, j'utilise les propriétés sans refaire la loi.

4. J'interprète : moyenne sur un grand nombre de répétitions, jeu favorable, équitable ou défavorable.

Le réflexe — une loi sans contrôle « somme des probabilités = 1 » et une espérance sans phrase d'interprétation coûtent des points à chaque fois.

Cas 1 · Établir une loi, calculer P(X ≤ a)

Réflexe — valeurs possibles d'abord, puis probabilité de chaque valeur en regroupant les issues ; « au plus », « au moins » traduits en $\leq$, $\geq$.

Exemple. Questions types : « Déterminer la loi de X », « Calculer $P(X \leqslant a)$ ». Exemple : une urne contient trois boules numérotées 1, 2, 3 ; on en tire deux, successivement et sans remise ; X est la somme des deux numéros.

Les 6 tirages ordonnés $(1;2)$, $(1;3)$, $(2;1)$, $(2;3)$, $(3;1)$, $(3;2)$ sont équiprobables, de probabilité $\frac{1}{6}$.

Sommes : 3, 4, 3, 5, 4, 5. Donc $P(X=3)=P(X=4)=P(X=5)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$; contrôle : $3\times\frac{1}{3}=1$.

« La somme vaut au plus 4 » : $P(X\leqslant 4)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

Attention — $\{X \leq 4\}$ contient la valeur 4 ; le contraire de $\{X \leq a\}$ est $\{X > a\}$.

Cas 2 · Calculer et interpréter une espérance

Réflexe — somme des produits valeur × probabilité, puis la phrase « en moyenne, sur un grand nombre de répétitions ».

Exemple. Questions types : « Calculer $E(X)$ et interpréter ». Exemple : X prend les valeurs 1, 3 et 8 avec les probabilités 0,5 ; 0,3 et 0,2.

$E(X)=1\times 0{,}5+3\times 0{,}3+8\times 0{,}2=0{,}5+0{,}9+1{,}6=3$.

Sur un grand nombre de répétitions, la moyenne des valeurs observées de X est proche de 3.

Attention — ne pas faire la moyenne simple des valeurs ; E(X) n'est pas forcément une valeur de X.

Cas 3 · Variance et écart type

Réflexe — ligne des x^2 dans le tableau, $E(X^2)$, puis $V(X)=E(X^2)-E(X)^2$, puis $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$.

Exemple. Questions types : « Calculer $V(X)$ et $\sigma(X)$ ». Exemple : la variable du cas 2.

$E(X^2)=1\times 0{,}5+9\times 0{,}3+64\times 0{,}2=0{,}5+2{,}7+12{,}8=16$.

König-Huygens : $V(X)=16-3^2=7$, donc $\sigma(X)=\sqrt{7}\approx 2{,}65$.

Attention — $E(X^2)$ se calcule avec les carrés des valeurs ; une variance négative est une erreur.

Cas 4 · Variable aX + b

Réflexe — j'identifie a et b avec leur signe ; E(aX + b) = aE(X) + b (linéarité). Approfondissement : V(aX + b) = a²V(X), σ(aX + b) = |a|σ(X).

Exemple. Questions types : « En déduire $E(Y)$, $V(Y)$, $\sigma(Y)$ ». Exemple : la variable du cas 2 et $Y = 10X - 5$.

$E(Y) = 10 \times 3 - 5 = 25$ (linéarité de l'espérance).
$V(Y) = 10^2 \times 7 = 700$ et $\sigma(Y) = 10\sqrt{7} \approx 26{,}46$: la constante -5 ne change pas la dispersion.

Attention — pas de « + b » dans la variance ; σ(−2X) = 2σ(X).

Cas 5 · Jeu équitable

Réflexe — gain net G = Y − m, E(G) = E(Y) − m ; équitable si E(G) = 0, et je résous l'équation si un paramètre est inconnu.

Exemple. Questions types : « Pour quelle valeur de g le jeu est-il équitable ? ». Exemple : une boîte contient 20 tickets ; 1 rapporte g euros, 4 rapportent 5 €, les autres rien. Le ticket coûte 2 €.

$E(Y) = g \times \dfrac{1}{20} + 5 \times \dfrac{4}{20} = \dfrac{g+20}{20}$, donc $E(G) = \dfrac{g+20}{20} - 2 = \dfrac{g-20}{20}$.
$E(G) = 0 \iff g = 20$: le jeu est équitable si le ticket gagnant rapporte 20 €.

Attention — l'équité se juge sur le gain net, mise retranchée.

Les pièges

- Une loi dont la somme ne vaut pas 1 est fausse : le contrôle doit être écrit.
- Confondre E(X²) (avec les carrés des valeurs) et E(X)² (carré d'un seul nombre).
- Approfondissement : V(aX + b) = a²V(X), ni « aV(X) », ni « + b ».
- Un écart type est toujours positif : σ(aX + b) = |a|σ(X).
- Gain brut ou gain net ? L'équité se juge sur le gain net.
- E(X) est une moyenne à long terme, pas un résultat certain d'une seule expérience.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).