

Devoir surveillé – Variables aléatoires discrètes

Loi de probabilité, espérance, variance et écart type d'une variable aléatoire réelle (programme de spé maths 1re, BO 2026)

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques 1^{re}

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Loi de probabilité et paramètres

(4 pts)

- a) a) Une variable aléatoire X prend les valeurs $-4, 1, 3$ et 6 avec $P(X = -4) = 0,2$, $P(X = 1) = 0,35$, $P(X = 3) = q$ et $P(X = 6) = 0,15$. Déterminer q .
- b) b) Calculer $P(X \geq 1)$.
- c) c) Calculer $E(X)$.
- d) d) Calculer $V(X)$ puis $\sigma(X)$ arrondi au centième.

Exercice 2 – Tirages sans remise

(4 pts)

- a) a) Un sac contient 4 billes bleues et 3 billes rouges. On tire successivement et sans remise deux billes ; B est le nombre de billes bleues obtenues. Montrer que $P(B = 2) = \frac{2}{7}$.
- b) b) Déterminer la loi de probabilité de B .
- c) c) Calculer $E(B)$.
- d) d) Calculer $V(B)$ (valeur exacte).

Exercice 3 – Tombola et équité

(4 pts)

- a) a) Une association vend 200 billets de tombola à 2,50 € pièce. Les lots sont : un lot de 150 €, quatre lots de 25 € et quinze lots de 5 €. Un joueur achète un billet ; G est son gain net (lot reçu moins prix du billet). Déterminer la loi de G .
- b) b) Calculer $E(G)$ et interpréter.
- c) c) En déduire le bénéfice de l'association sur cette tombola.
- d) d) À quel prix faudrait-il vendre le billet pour que la tombola soit un jeu équitable ?

Exercice 4 – Covoiturage : transformation affine

(4 pts)

- a) a) Sur un trajet de covoiturage, le nombre N de passagers a pour loi : $P(N = 0) = 0,1$, $P(N = 1) = 0,3$, $P(N = 2) = 0,4$, $P(N = 3) = 0,2$. Calculer $E(N)$.
- b) b) Calculer $V(N)$ et $\sigma(N)$.
- c) c) Le conducteur reçoit 9 € par passager et paie 14 € de péage ; son résultat est $R = 9N - 14$. Calculer $E(R)$ et $\sigma(R)$.
- d) d) Un élève écrit : « $V(R) = 9 \times 0,81 - 14 = -6,71$ ». Expliquer les deux erreurs commises.

Exercice 5 – Loi dépendant d'un paramètre*(4 pts)*

- a) a) Soit $a > 0$. Une variable aléatoire X prend les valeurs 0 , a et $2a$ avec les probabilités $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{6}$.
Exprimer $E(X)$ en fonction de a .
- b) b) Montrer que $V(X) = \frac{5a^2}{9}$.
- c) c) Déterminer la valeur exacte de a pour laquelle $\sigma(X) = 2$.
- d) d) On pose $Y = X - E(X)$. Déterminer $E(Y)$ et $V(Y)$.

Bon courage !