

Corrigé et barème – Variables aléatoires discrètes

Loi de probabilité, espérance, variance et écart type d'une variable aléatoire réelle (programme de spé maths 1re, BO 2026)

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques 1^{re}

Exercice 1 – Loi de probabilité et paramètres

(4 pts)

- a) $q = 1 - 0,2 - 0,35 - 0,15 = 0,3$. (1)
- b) $P(X \geq 1) = 0,35 + 0,3 + 0,15 = 0,8$. (1)
- c) $E(X) = -4 \times 0,2 + 1 \times 0,35 + 3 \times 0,3 + 6 \times 0,15 = -0,8 + 0,35 + 0,9 + 0,9 = 1,35$. (1)
- d) $E(X^2) = 16 \times 0,2 + 1 \times 0,35 + 9 \times 0,3 + 36 \times 0,15 = 3,2 + 0,35 + 2,7 + 5,4 = 11,65$; $V(X) = 11,65 - 1,35^2 = 11,65 - 1,8225 = 9,8275$; $\sigma(X) \approx 3,13$. (1)

Erreur fréquente — Retrancher $E(X)$ au lieu de $E(X)^2$ dans König-Huygens, ou oublier le signe de la valeur -4 dans le calcul de l'espérance.

Exercice 2 – Tirages sans remise

(4 pts)

- a) $P(B = 2) = \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{12}{42} = \frac{2}{7}$. (1)
- b) $P(B = 0) = \frac{3}{7} \times \frac{2}{6} = \frac{6}{42} = \frac{1}{7}$; $P(B = 1) = 1 - \frac{2}{7} - \frac{1}{7} = \frac{4}{7}$ (vérification : $\frac{4}{7} \times \frac{3}{6} + \frac{3}{7} \times \frac{4}{6} = \frac{24}{42} = \frac{4}{7}$). (1)
- c) $E(B) = 1 \times \frac{4}{7} + 2 \times \frac{2}{7} = \frac{8}{7} \approx 1,14$ bille bleue. (1)
- d) $E(B^2) = \frac{4}{7} + 4 \times \frac{2}{7} = \frac{12}{7}$; $V(B) = \frac{12}{7} - \left(\frac{8}{7}\right)^2 = \frac{84}{49} - \frac{64}{49} = \frac{20}{49} \approx 0,41$. (1)

À retenir — Sans remise, le dénominateur passe de 7 à 6 au second tirage et le nombre de billes de la couleur tirée diminue d'une unité.

Exercice 3 – Tombola et équité

(4 pts)

- a) G prend les valeurs 147,5 (probabilité $\frac{1}{200} = 0,005$), 22,5 ($\frac{4}{200} = 0,02$), 2,5 ($\frac{15}{200} = 0,075$) et $-2,5$ ($\frac{180}{200} = 0,9$) ; somme : 1. (1)
- b) $E(G) = 147,5 \times 0,005 + 22,5 \times 0,02 + 2,5 \times 0,075 - 2,5 \times 0,9 = 0,7375 + 0,45 + 0,1875 - 2,25 = -0,875$ € : un joueur perd en moyenne 0,875 € par billet, le jeu lui est défavorable. (1)
- c) Bénéfice = $200 \times 2,5 - (150 + 4 \times 25 + 15 \times 5) = 500 - 325 = 175$ € (ce qui vaut bien $-200 \times E(G)$). (1)
- d) Le gain brut moyen est $\frac{325}{200} = 1,625$ € ; le jeu est équitable si le prix du billet vaut 1,625 €, soit environ 1,63 €. (1)

Repère — Le bénéfice de l'organisateur sur N billets vaut $-N \times E(G)$: l'espérance du gain net d'un joueur et le résultat de l'organisateur sont les deux faces du même calcul.

Exercice 4 – Covoiturage : transformation affine

(4 pts)

- a) $E(N) = 0 \times 0,1 + 1 \times 0,3 + 2 \times 0,4 + 3 \times 0,2 = 0,3 + 0,8 + 0,6 = 1,7$ passager. (1)
- b) $E(N^2) = 0,3 + 4 \times 0,4 + 9 \times 0,2 = 0,3 + 1,6 + 1,8 = 3,7$; $V(N) = 3,7 - 1,7^2 = 3,7 - 2,89 = 0,81$; $\sigma(N) = \sqrt{0,81} = 0,9$. (1)
- c) $E(R) = 9 \times 1,7 - 14 = 15,3 - 14 = 1,3$ € ; $\sigma(R) = 9 \times 0,9 = 8,1$ €. (1)
- d) Première erreur : le coefficient 9 doit être élevé au carré, $V(9N - 14) = 81 \times 0,81 = 65,61$. Seconde erreur : la constante -14 ne modifie pas la variance. Une variance négative est d'ailleurs impossible, ce qui aurait dû alerter l'élève. (1)

Le point clé — $V(aX + b) = a^2V(X)$: le coefficient est au carré, la constante disparaît, et le résultat est toujours positif ou nul.

Exercice 5 – Loi dépendant d'un paramètre

(4 pts)

- a) $E(X) = 0 \times \frac{1}{2} + a \times \frac{1}{3} + 2a \times \frac{1}{6} = \frac{a}{3} + \frac{a}{3} = \frac{2a}{3}$. (1)
- b) $E(X^2) = a^2 \times \frac{1}{3} + 4a^2 \times \frac{1}{6} = \frac{a^2}{3} + \frac{2a^2}{3} = a^2$; $V(X) = a^2 - \left(\frac{2a}{3}\right)^2 = a^2 - \frac{4a^2}{9} = \frac{5a^2}{9}$. (1)
- c) $\sigma(X) = \sqrt{\frac{5a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{5}}{3}$ car $a > 0$; $\frac{a\sqrt{5}}{3} = 2$ donne $a = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5} \approx 2,68$. (1)
- d) $Y = X - \frac{2a}{3}$ est de la forme $X + b$: $E(Y) = E(X) - \frac{2a}{3} = 0$ et $V(Y) = 1^2 \times V(X) = \frac{5a^2}{9}$ (soit 4 pour la valeur de a trouvée en c). (1)

Attention — Avec un paramètre, on manipule des expressions littérales : $\sqrt{a^2} = a$ seulement parce que $a > 0$, et centrer une variable annule son espérance sans changer sa variance.