

Trigonométrie

L'essentiel sur une page

Ce chapitre remplace les degrés par les radians et le triangle rectangle par le cercle trigonométrique : on doit savoir placer un réel sur le cercle, lire son cosinus et son sinus, et utiliser les symétries du cercle (angles associés).

1 Définitions

- **Cercle trigonométrique** : centre O , rayon 1 , sens direct (inverse des aiguilles d'une montre).
- **Radian** : angle qui intercepte un arc de longueur égale au rayon. Tour complet : 2π rad = 360° ; sur un cercle de rayon r , arc $\ell = r\alpha$.
- **Enroulement** : au réel x correspond un unique point M du cercle ; x et $x + 2k\pi$ donnent le même point.
- **Mesure principale** : l'unique mesure dans $]-\pi ; \pi]$.
- **Cosinus et sinus de x** : abscisse et ordonnée de M : $M(\cos x ; \sin x)$.

2 Formules

- Conversion : $\alpha_{\text{rad}} = \alpha_{\text{deg}} \times \frac{\pi}{180}$; $\alpha_{\text{deg}} = \alpha_{\text{rad}} \times \frac{180}{\pi}$.
- $-1 \leq \cos x \leq 1$, $-1 \leq \sin x \leq 1$, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.
- $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$, $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$.
- Angles associés : $\cos(-x) = \cos x$, $\sin(-x) = -\sin x$; $\cos(\pi - x) = -\cos x$, $\sin(\pi - x) = \sin x$; $\cos(\pi + x) = -\cos x$, $\sin(\pi + x) = -\sin x$; $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$, $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$; $\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x$, $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$.

3 Valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Cosinus : $\frac{\sqrt{4}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{1}}{2}$, $\frac{\sqrt{0}}{2}$; sinus dans l'autre sens.

Hors de $[0 ; \frac{\pi}{2}]$, on se ramène à ces valeurs par les angles associés.

4 Méthodes

1. **Mesure principale** : écrire 2π avec le dénominateur de la fraction, ajouter ou retrancher des tours jusqu'à $]-\pi ; \pi]$.
2. **Sinus à partir du cosinus** : $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, puis signe donné par le quadrant de x .
3. **Équation $\cos x = a$ ou $\sin x = a$** : vérifier $-1 \leq a \leq 1$, tracer la droite verticale ou horizontale, lire une solution dans le tableau, trouver l'autre par symétrie ($-x$ pour cos, $\pi - x$ pour sin), ajouter $2k\pi$ selon l'intervalle.
4. **Angle associé inconnu** : placer x dans le premier quadrant, dessiner le symétrique, lire les signes.

5 Pièges

- $-\pi$ n'est pas une mesure principale ; $\frac{7\pi}{6}$ non plus (c'est $-\frac{5\pi}{6}$).
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ ne dit rien sur $\cos x + \sin x$.
- $\cos(a + b) \neq \cos a + \cos b$ et $\cos(2x) \neq 2\cos x$.
- Calculatrice en mode DEG : $\cos(1)$ devient $\cos(1^\circ)$.
- Une équation sans intervalle a une infinité de solutions ; avec un intervalle, compter les tours.

L'ESSENTIEL

— $180^\circ = \pi$ rad : on convertit par proportionnalité.

— Un réel x correspond à un point $M(\cos x ; \sin x)$ du cercle trigonométrique ; $x + 2k\pi$ donne le même point.

— La mesure principale est dans $]-\pi ; \pi]$.

— $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, et le quadrant fixe le signe.

— Angles associés : $-x$ (axe des abscisses), $\pi - x$ (axe des ordonnées), $\pi + x$ (centre), $\frac{\pi}{2} - x$ (échange cos et sin).