

Corrigé et barème – Trigonométrie

Radian, cercle trigonométrique, cos et sin — Spécialité Mathématiques 1re (programme actuel)

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques 1re

Exercice 1 – Conversions

(4 pts)

- a) $108 \times \frac{\pi}{180} = \frac{108\pi}{180} = \frac{3\pi}{5}$ (division par 36). (1)
 b) $\frac{5\pi}{8} \times \frac{180}{\pi} = \frac{5 \times 180}{8} = 112,5^\circ$. (1)
 c) $3 \times \frac{180}{\pi} = \frac{540}{\pi} \approx 171,9^\circ$. (1)
 d) $-400 \times \frac{\pi}{180} = -\frac{400\pi}{180} = -\frac{20\pi}{9}$ (division par 20). (1)

Repère — Une mesure en radians n'est pas forcément un multiple de π : 3 rad est un peu moins qu'un demi-tour, et une mesure peut dépasser un tour (-400°).

Exercice 2 – Mesures principales et cercle

(4 pts)

- a) $2\pi = \frac{12\pi}{6}$ et $31 = 2 \times 12 + 7$, donc $\frac{31\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} + 2 \times 2\pi$; $\frac{7\pi}{6} > \pi$, donc $\frac{7\pi}{6} - 2\pi = -\frac{5\pi}{6}$. Mesure principale : $-\frac{5\pi}{6}$. (1)
 b) $2\pi = \frac{8\pi}{4}$; $-\frac{23\pi}{4} + 3 \times \frac{8\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \in]-\pi; \pi]$. Mesure principale : $\frac{\pi}{4}$. (1)
 c) M est associé à $-\frac{5\pi}{6} = -(\pi - \frac{\pi}{6})$: $\cos(-\frac{5\pi}{6}) = \cos \frac{5\pi}{6} = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(-\frac{5\pi}{6}) = -\sin \frac{5\pi}{6} = -\frac{1}{2}$. Donc $M(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2})$. (1)
 d) Les réels associés à M sont $-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$. Dans $[0; 4\pi]$: $k = 1$ donne $\frac{7\pi}{6}$, $k = 2$ donne $\frac{19\pi}{6}$ ($k = 3$ donne $\frac{31\pi}{6} > 4\pi = \frac{24\pi}{6}$). Réponse : $\frac{7\pi}{6}$ et $\frac{19\pi}{6}$. (1)

Erreur fréquente — Retrancher les tours ne suffit pas : $\frac{7\pi}{6}$ est bien « à moins d'un tour », mais ce n'est pas la mesure principale, qui doit être dans $]-\pi; \pi]$.

Exercice 3 – Cosinus, sinus et angles associés

(4 pts)

- a) $\sin^2 x = 1 - \frac{49}{625} = \frac{576}{625}$; dans le deuxième quadrant, $\sin x > 0$, donc $\sin x = \frac{24}{25}$. (1)
 b) $\cos(\pi - x) = -\cos x = \frac{7}{25}$; $\sin(\pi + x) = -\sin x = -\frac{24}{25}$. (1)
 c) $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x = -\frac{7}{25}$; $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x = \frac{24}{25}$. (1)
 d) $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$ et $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$, donc l'expression vaut $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ (vérification : $\frac{576}{625} + \frac{49}{625} = 1$). (1)

Le point clé — La relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ donne un carré : c'est l'intervalle contenant x qui fixe le signe.

Exercice 4 – Équations trigonométriques

(4 pts)

- a) $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$; l'autre point d'ordonnée $\frac{1}{2}$ est le symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, associé à $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$. $S = \{\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\}$. (1)
 b) Les points d'abscisse nulle sont J et J' , associés à $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$. $S = \{-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\}$. (1)
 c) Solutions réelles : $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ et $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi$. Dans $[0; 4\pi]$: $\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{15\pi}{4}$. $S = \{\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}; \frac{9\pi}{4}; \frac{15\pi}{4}\}$. (1)
 d) Pour tout réel x , $\sin x$ est l'ordonnée d'un point du cercle de rayon 1, donc $\sin x \geq -1 > -1,2$.
 Aucune solution : $S = \emptyset$. (1)

Attention — Sur $[0; 4\pi]$, chaque point du cercle correspond à deux réels : on double le nombre de solutions trouvées sur un tour.

Exercice 5 – Formules et raisonnement*(4 pts)*

- a) $\sin(\pi - x) = \sin x$, $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$. Somme : $\sin x - \sin x + \sin x = \sin x$. (1)
- b) Développement : $(\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x) + (\sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \cos^2 x) = 2(\sin^2 x + \cos^2 x) = 2 \times 1 = 2$. (1)
- c) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$, $\sin(\pi - x) = \sin x$, $\cos(\pi - x) = -\cos x$, $\cos(-x) = \cos x$. Expression : $-\sin^2 x - \cos^2 x = -1$. (1)
- d) Pour $x = 0$: $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ alors que $\cos 0 = 1$. La symétrie par rapport à la première bissectrice échange abscisse et ordonnée : $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$. (1)

Astuce — Une formule d'angle associé se vérifie en une seconde avec $x = 0$ ou $x = \frac{\pi}{2}$: si le test échoue, la formule est fausse.