

Suites numériques

Les suites modélisent ce qui évolue étape par étape (capital, population) : savoir calculer un terme, reconnaître une suite arithmétique ou géométrique, sommer et étudier les variations.

1 Définitions

- **Suite numérique** (u_n) : fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$; u_n est le terme d'indice n .
- **Forme explicite** : $u_n = f(n)$, calcul direct de tout terme.
- **Récurrence** : u_0 donné et $u_{n+1} = f(u_n)$, chaque terme dépend du précédent.
- **Arithmétique** : $u_{n+1} = u_n + r$ (on ajoute la raison r).
- **Géométrique** : $v_{n+1} = q \times v_n$ (on multiplie par la raison q).
- **Croissante** : $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout n ; **décroissante** : $u_{n+1} \leq u_n$; **monotone** : l'un ou l'autre.

2 Formules

- Arithmétique : $u_n = u_0 + nr$ et $u_n = u_p + (n - p)r$.
- Géométrique : $v_n = v_0 \times q^n$ et $v_n = v_p \times q^{n-p}$.
- $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
- Somme arithmétique : $u_0 + \dots + u_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$ (nombre de termes $\times$ (premier + dernier) $\div 2$).
- Somme géométrique ($q \neq 1$) : $v_0 + \dots + v_n = v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.
- Évolution de $t\%$ répétée : suite géométrique de raison $1 + \frac{t}{100}$.

3 Sens de variation et limite

- Signe de $u_{n+1} - u_n$ pour tout n : positif $\Rightarrow$ croissante, négatif $\Rightarrow$ décroissante.
- Termes strictement positifs : comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.
- Arithmétique : croissante si $r > 0$. Géométrique ($v_0 > 0$) : croissante si $q > 1$, décroissante si $0 < q < 1$, non monotone si $q < 0$.
- Limite (intuitive) : q^n tend vers 0 si $0 < q < 1$, vers $+\infty$ si $q > 1$; $\frac{1}{n}$ tend vers 0.

4 Méthodes

1. **Nature** : calculer $u_{n+1} - u_n$ (constante $\Rightarrow$ arithmétique) ou $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ (constante $\Rightarrow$ géométrique) ; un contre-exemple suffit pour réfuter.
2. **Somme** : identifier la nature, compter les termes ($n - p + 1$ de u_p à u_n), appliquer la formule.
3. **Variation** : écrire u_{n+1} , calculer la différence, étudier son signe.
4. **Seuil** : boucle while le qui recalcule le terme tant que le seuil n'est pas atteint, puis vérifier avec les deux termes encadrant le seuil.

5 Pièges

- $u_{n+1} \neq u_n + 1$: c'est le terme suivant.
- De u_p à u_n il y a $n - p + 1$ termes ; dans $1 + q + \dots + q^n$ l'exposant final de la formule est $n + 1$.
- Les pourcentages successifs se multiplient : -3% pendant 10 ans donne $0,97^{10} \approx 0,737$, pas -30% .
- Les premiers termes ne prouvent ni la nature ni la monotonie : raisonner pour tout n .

L'ESSENTIEL

- Arithmétique : on ajoute r , $u_n = u_0 + nr$, la somme vaut nombre de termes $\times$ (premier + dernier) $\div 2$.
- Géométrique : on multiplie par q , $v_n = v_0 \times q^n$, la somme vaut $v_0 \times (1 - q^{n+1}) \div (1 - q)$ pour $q \neq 1$.
- Sens de variation : signe de $u_{n+1} - u_n$ pour tout n ; quotient comparé à 1 seulement si les termes sont strictement positifs.

- Une suite géométrique de raison négative n'est jamais monotone.
- Pour $0 < q < 1$, q^n tend vers 0 ; pour $q > 1$, q^n tend vers $+\infty$; un seuil se trouve avec une boucle while.