Suites géométriques

Fiche méthode

(Spécialité maths 1re · Algèbre · Suites)

La démarche face à une suite géométrique

1. Je repère la multiplication : « multiplié par », « augmente de $t\,\%$ », « chaque terme est le triple du précédent » : c'est géométrique.

2. Je le prouve pour tout n : $u_{n+1} = q \times u_n$, avec q indépendant de n, et je donne raison et premier terme.

3. J'écris le terme général $u_n = u_0 \times q^n$ (ou $u_1 \times q^{n-1}$) et je calcule ce qu'on me demande.

4. Je conclus : sens de variation (signe de $u_0(q-1)$), comportement de q^n, somme, seuil.

Le réflexe — « géométrique de raison q » ne suffit pas : on écrit la relation pour tout n, puis on donne la raison ET le premier terme.

Cas 1 · Montrer qu'une suite est géométrique

Réflexe — j'écris u(n+1) (ou v(n+1)) pour tout n, je remplace, je factorise pour faire apparaître u(n) : u(n+1) = q × u(n).

Exemple. Questions types : « Montrer que (v_n) est géométrique », « Préciser sa raison et son premier terme ». Exemple : $u_0 = 5$, $u_{n+1} = 3\,u_n - 4$ et $v_n = u_n - 2$.

Pour tout entier n : $v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = 3\,u_n - 4 - 2 = 3\,u_n - 6 = 3\,(u_n - 2) = 3\,v_n$.

Donc (v_n) est géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0 = u_0 - 2 = 3$.

Ainsi $v_n = 3 \times 3^n = 3^{n+1}$ et $u_n = v_n + 2 = 3^{n+1} + 2$. Contrôle : $u_1 = 3 \times 5 - 4 = 11 = 3^2 + 2$.

Attention — trouver le même quotient sur les deux premiers termes ne prouve rien ; il faut le calcul pour tout n.

Cas 2 · Terme général et raison

Réflexe — $u_n = u_p \times q^{(n-p)}$: l'exposant est l'écart des indices ; deux termes connus donnent q^(écart).

Exemple. Questions types : « Exprimer u_n en fonction de n », « Déterminer la raison ». Exemple : suite géométrique de premier terme u_1, avec $u_1 = 4$ et $u_4 = -108$.

$u_4 = u_1 \times q^3$, donc $q^3 = \dfrac{-108}{4} = -27$.

Le seul réel dont le cube vaut -27 est -3 : $q = -3$.

La suite commence à u_1 : $u_n = u_1 \times q^{n-1} = 4 \times (-3)^{n-1}$ pour tout $n \geqslant 1$.

Attention — écart pair : $q^2 = \ldots$ donne deux valeurs opposées ; il faut le signe de q pour choisir.

Cas 3 · Sens de variation et comportement

Réflexe — $u(n+1) - u(n) = u_0\, q^n\,(q-1)$: signe de $u_0(q-1)$; puis je compare q à -1 et à 1.

Exemple. Questions types : « Étudier le sens de variation », « Que deviennent les termes quand n devient très grand ? ». Exemple : $u_n = -5 \times 0{,}8^n$.

Pour tout n : $u_{n+1} - u_n = -5 \times 0{,}8^n \times (0{,}8 - 1) = 0{,}8^n$.

Comme $0{,}8^n > 0$, la différence est strictement positive : (u_n) est strictement croissante (premier terme négatif, raison entre 0 et 1).

$-1 < 0{,}8 < 1$: $0{,}8^n$ se rapproche de 0, donc u_n aussi, en restant négatif.

Attention — $q > 1$ avec $u_0 < 0$: la suite décroît ; $q < 0$ ($u_0 \neq 0$) : jamais monotone.

Cas 4 · Somme de termes consécutifs

Réflexe — premier terme × (1 − qˆ(nombre de termes)) / (1 − q) ; nombre de termes = dernier indice − premier indice + 1.

Exemple. Questions types : « Calculer $u_p + \cdots + u_n$ », « Calculer $1 + q + \cdots + q^n$ ». Exemple : $u_n = 5 \times 2^n$, calculer $S = u_2 + u_3 + \cdots + u_9$.

Premier terme : $u_2 = 5 \times 4 = 20$; raison 2 ; nombre de termes : $9 - 2 + 1 = 8$.

$$S = 20 \times \frac{1 - 2^8}{1 - 2} = 20 \times \frac{-255}{-1} = 20 \times 255 = 5\,100.$$

Ordre de grandeur : le dernier terme $u_9 = 2\,560$ et la somme vaut à peu près le double, cohérent.

Attention — l'exposant est le nombre de termes, pas le dernier indice.

Cas 5 · Évolution à taux constant

Réflexe — +t % → raison 1 + t/100 ; −t % → raison 1 − t/100 ; sur n périodes, coefficient $(1 + t/100)^n$.

Exemple. Questions types : « Justifier que (C_n) est géométrique », « Taux d'évolution global ». Exemple : 5 000 € placés à 2 % par an à intérêts composés.

Chaque année, le capital augmente de 2 % : $C_{n+1} = 1{,}02\,C_n$. (C_n) est géométrique de raison 1,02, de premier terme $C_0 = 5\,000$: $C_n = 5\,000 \times 1{,}02^n$.

Sur 3 ans : $1{,}02^3 = 1{,}061\,208$, soit une hausse globale d'environ 6,12 % (et non 6 %).

Attention — les taux successifs ne s'additionnent pas ; on multiplie les coefficients.

Les pièges

- Ajouter au lieu de multiplier : ajouter une constante, c'est le cas arithmétique.
- Suite qui commence à u_1 : $u_n = u_1 \times q^{n-1}$, et non $u_1 \times q^n$.
- De u_p à u_n, il y a $n - p + 1$ termes : c'est ce nombre qui va en exposant dans la somme.
- $(-2)^4 = 16$ mais $-2^4 = -16$: parenthèses obligatoires avec une raison négative.
- Le quotient u(n+1)/u(n) n'a de sens que si aucun terme n'est nul.
- Un seuil se justifie avec les deux rangs qui l'encadrent et le sens de variation.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).