

Corrigé et barème – Suites géométriques

Définition par récurrence, raison, terme général $u(n) = u(0) \times q^n$, sens de variation selon q ($q > 0$),
somme $1 + q + \dots + q^n$ et somme de termes consécutifs, comportement de q^n (approche intuitive),
modélisation d'évolutions à taux constant

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques 1^{re}

Exercice 1 – Terme général et variations

(4 pts)

- a) $u_1 = 0,3 \times 5 = 1,5$; $u_2 = 1,5 \times 5 = 7,5$. (1)
- b) $u_n = u_0 \times q^n = 0,3 \times 5^n$. (1)
- c) $u_6 = 0,3 \times 5^6 = 0,3 \times 15\,625 = 4\,687,5$. (1)
- d) $u_{n+1} - u_n = u_n(5 - 1) = 1,2 \times 5^n > 0$: (u_n) est strictement croissante ($u_0 > 0, q > 1$). (1)

Repère — Le sens de variation se lit sur le signe de $u_0(q - 1)$ lorsque $q > 0$.

Exercice 2 – Reconnaître une suite géométrique

(4 pts)

- a) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5 \times 2^{n+1}}{3^{n+2}} \times \frac{3^{n+1}}{5 \times 2^n} = \frac{2}{3}$ (termes non nuls) : géométrique de raison $\frac{2}{3}$, premier terme $u_0 = \frac{5}{3}$. (1)
- b) $u_0 > 0$ et $0 < \frac{2}{3} < 1$: (u_n) est strictement décroissante. (1)
- c) $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ se rapproche de 0, donc $u_n = \frac{5}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ se rapproche de 0. (1)
- d) $v_0 = 0, v_1 = 2$: si (v_n) était géométrique de raison q , on aurait $v_1 = q \times v_0 = 0$. Contradiction : (v_n) n'est pas géométrique. (1)

Attention — Contenir une puissance de n ne suffit pas : il faut que le quotient de deux termes consécutifs soit le même pour tout n .

Exercice 3 – Sommes

(4 pts)

- a) 7 termes, raison 7 : $S_1 = \frac{7^7 - 1}{7 - 1} = \frac{823\,542}{6} = 137\,257$. (1)
- b) Premier terme 1 250, raison $-\frac{1}{5}$, 5 termes : $S_2 = 1\,250 \times \frac{1 - (-\frac{1}{5})^5}{1 + \frac{1}{5}} = 1\,250 \times \frac{3\,126}{3\,125} \times \frac{5}{6} = 1\,042$;
vérification : $1\,000 + 50 - 10 + 2 = 1\,042$. (1)
- c) Premier terme $2^5 = 32$, raison 2, $12 - 5 + 1 = 8$ termes : $S_3 = 32 \times \frac{2^8 - 1}{2 - 1} = 32 \times 255 = 8\,160$. (1)
- d) La somme compte 7 termes (de 7^0 à 7^6) : l'exposant doit être 7. Son calcul donne 19 608 au lieu de 137 257. (1)

Erreur fréquente — L'exposant de la formule est le nombre de termes, pas le plus grand exposant écrit dans la somme.

Exercice 4 – Un abonnement qui augmente

(4 pts)

- a) Coefficient 1,035 : $A_1 = 39 \times 1,035 \approx 40,37$ € ; $A_2 = 39 \times 1,035^2 \approx 41,78$ €. (1)
- b) Chaque année le prix est multiplié par 1,035 : géométrique de raison 1,035, $A_n = 39 \times 1,035^n$. (1)
- c) 2034 correspond à $n = 8$: $A_8 = 39 \times 1,035^8 \approx 39 \times 1,316\,809 \approx 51,36$ €. (1)
- d) $1,035^8 \approx 1,3168$: hausse d'environ 31,7 %. Les hausses portent sur des prix déjà augmentés : les coefficients se multiplient, les taux ne s'additionnent pas ($8 \times 3,5 = 28$ est faux). (1)

Le point clé — Un taux constant sur plusieurs périodes donne un coefficient global égal à une puissance, jamais à une somme de taux.

Exercice 5 – Seuil et algorithme*(4 pts)*

a) Perdre 6 %, c'est multiplier par 0,94 : $S_{n+1} = 0,94 S_n$, suite géométrique de raison 0,94, donc $S_n = 2\,400 \times 0,94^n$. (1)

b)

```
def seuil():  
    n = 0  
    s = 2400  
    while s >= 1200:  
        s = s * 0.94  
        n = n + 1  
    return n
```

(1)

c) $S_{11} \approx 1\,215,1 \geq 1\,200$ et $S_{12} \approx 1\,142,2 < 1\,200$; la suite est décroissante, donc la fonction renvoie 12. (1)

d) $0 < 0,94 < 1$: $0,94^n$ se rapproche de 0, donc S_n aussi ; S_n finit par passer sous toute valeur positive, en particulier sous 1 ha. (1)

Astuce — Pour justifier un seuil, donner le dernier terme qui ne le franchit pas et le premier qui le franchit, en rappelant la monotonie.