Suites arithmétiques

Fiche méthode

(Spécialité maths 1re · Suites numériques, modèles discrets)

La démarche face à une suite arithmétique

1. Je justifie la nature de la suite : $u_{n+1} - u_n$ constante, ou accroissement constant dans l'énoncé.

2. J'écris le terme général $u_n = u_0 + nr$ (ou $u_1 + (n-1)r$), en vérifiant le rang de départ.

3. Je réponds à la question : signe de r pour les variations, formule de somme, inéquation pour un seuil.

4. Je contrôle sur un ou deux termes calculés à la main, puis je conclus dans le contexte.

Le réflexe — « la différence ne dépend pas de n » est la phrase qui prouve qu'une suite est arithmétique : quelques termes calculés ne suffisent jamais.

Cas 1 · Démontrer qu'une suite est arithmétique

Réflexe — je calcule $u_{n+1} - u_n$ pour n quelconque, je simplifie ; constante = arithmétique ; deux écarts différents = pas arithmétique.

Exemple. Questions types : « Montrer que (w_n) est arithmétique, en donnant sa raison et w_0. » Exemple : $w_n = (n+1)^2 - n^2$.

On développe : $w_n = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$.

Pour tout n : $w_{n+1} - w_n = 2(n+1) + 1 - (2n+1) = 2$.

La différence est constante : (w_n) est arithmétique de raison 2, de premier terme $w_0 = 1$.

Attention — trois écarts égaux ne prouvent rien ; une « raison » qui dépend de n n'en est pas une.

Cas 2 · Trouver le terme général

Réflexe — $u_n = u_p + (n-p)r$; avec deux termes : $r = (u_q - u_p)/(q-p)$, puis $u_0 = u_p - pr$.

Exemple. Questions types : « Déterminer la raison et le premier terme », « Exprimer u_n en fonction de n ». Exemple : $u_3 = 19$ et $u_{10} = 47$.

$u_{10} = u_3 + 7r$: $47 = 19 + 7r$, donc $7r = 28$ et $r = 4$.

$u_0 = u_3 - 3r = 19 - 12 = 7$.

Donc $u_n = 7 + 4n$; contrôle : $u_{10} = 7 + 40 = 47$.

Attention — suite qui commence au rang 1 : $u_n = u_1 + (n-1)r$, pas $u_1 + nr$.

Cas 3 · Sens de variation

Réflexe — $u_{n+1} - u_n = r$: je conclus avec le signe de r ; les points $(n\,;\,u_n)$ sont sur $y = rx + u_0$.

Exemple. Questions types : « Étudier le sens de variation de (u_n) », « Sur quelle droite sont les points ? ». Exemple : $u_0 = -6$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{3}{4}$.

Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{3}{4}$: la suite est arithmétique de raison $\dfrac{3}{4}$.

Comme $\dfrac{3}{4} > 0$, (u_n) est strictement croissante.

$u_n = -6 + \dfrac{3}{4}n$: les points $(n\,;\,u_n)$ sont sur la droite d'équation $y = \dfrac{3}{4}x - 6$.

Attention — le signe de u_0 ne compte pas, seul le signe de r décide.

Cas 4 · Calculer une somme

Réflexe — premier terme, dernier terme, nombre de termes (q − p + 1), puis nombre × (premier + dernier)/2.

Exemple. Questions types : « Calculer $S = u_p + \cdots + u_q$ ». Exemple : $t_n = 1 + 2{,}5n$ et $S = t_5 + t_6 + \cdots + t_{24}$.

Premier terme : $t_5 = 1 + 12{,}5 = 13{,}5$; dernier terme : $t_{24} = 1 + 60 = 61$.

Nombre de termes : $24 - 5 + 1 = 20$.

$S = 20 \times \dfrac{13{,}5 + 61}{2} = 20 \times 37{,}25 = 745$.

Attention — de u_0 à u_n il y a n + 1 termes ; n(n + 1)/2 ne vaut que pour 1 + 2 + … + n.

Cas 5 · Problème de seuil

Réflexe — u_n en fonction de n, inéquation, plus petit entier (arrondi par excès), vérification sur deux termes, phrase de conclusion.

Exemple. Questions types : « À partir de quand… ? », « Au bout de combien de jours… ? ». Exemple : une cuve contient 1 200 L et perd 35 L par jour.

$v_n = 1\,200 - 35n$. On cherche $v_n < 300$: $1\,200 - 35n < 300 \iff 35n > 900 \iff n > 25{,}71\ldots$

Le plus petit entier est 26. Vérification : $v_{25} = 325$ et $v_{26} = 290$.

La cuve passe sous 300 L au bout de 26 jours.

Attention — arrondir par excès, pas au plus proche ; vérifier si l'inégalité est stricte ou large.

Les pièges

- Rang de départ : si la suite commence à u_1, $u_n = u_1 + (n - 1)r$.
- Nombre de termes : de u_p à u_q, il y a q − p + 1 termes, pas q − p.
- Quelques termes ne prouvent rien : il faut $u_{n+1} - u_n$ pour tout n.
- Seuil : n > 25,71 donne n = 26 ; on vérifie avec les deux termes qui encadrent le seuil.
- Une hausse de 2 % par an n'est pas un accroissement constant : la suite n'est pas arithmétique.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).