

Corrigé et barème – Suites arithmétiques

Définition par récurrence, raison, terme général $u(n) = u(0) + nr$, sens de variation selon le signe de r , représentation (points alignés), somme $1 + 2 + \dots + n$ et somme de termes consécutifs, modélisation d'évolutions à accroissement constant

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques 1^{re}

Exercice 1 – Reconnaître et exprimer une suite arithmétique

(4 pts)

- a) $u_1 = 13,3$; $u_2 = 12,6$; $u_3 = 11,9$. (1)
- b) $u_{n+1} - u_n = -0,7$ constante : suite arithmétique de raison $-0,7$; $r < 0$, donc strictement décroissante. (1)
- c) $u_n = u_0 + nr = 14 - 0,7n$. (1)
- d) $u_{50} = 14 - 35 = -21$. $14 - 0,7n < 0 \iff n > 20$; $u_{20} = 0$ n'est pas strictement négatif, donc le premier est $u_{21} = -0,7$. (1)

Erreur fréquente — Quand le seuil est atteint exactement ($u_{20} = 0$), l'inégalité stricte impose de passer au rang suivant.

Exercice 2 – Deux termes connus

(4 pts)

- a) $u_{13} = u_4 + 9r$: $21 = -3 + 9r$, donc $r = \frac{24}{9} = \frac{8}{3}$. (1)
- b) $u_0 = u_4 - 4r = -3 - \frac{32}{3} = -\frac{41}{3}$. (1)
- c) $u_n = u_0 + nr = -\frac{41}{3} + \frac{8n}{3} = \frac{8n-41}{3}$ (contrôle : $u_{13} = \frac{63}{3} = 21$). (1)
- d) $\frac{8n-41}{3} = 101 \iff 8n = 344 \iff n = 43$: oui, $u_{43} = 101$. $\frac{8n-41}{3} = 100 \iff n = \frac{341}{8}$, non entier : 100 n'est pas un terme. (1)

À retenir — Une raison non entière n'a rien d'anormal : on garde les fractions exactes jusqu'au bout.

Exercice 3 – Sommes

(4 pts)

- a) $\frac{120 \times 121}{2} = 7\,260$. (1)
- b) $7\,260 - (1 + \dots + 40) = 7\,260 - 820 = 6\,440$ (contrôle : $80 \times \frac{41+120}{2} = 6\,440$). (1)
- c) $3 + 6 + \dots + 150 = 3(1 + \dots + 50) = 3 \times 1\,275 = 3\,825$. (1)
- d) $S_n = (n+1)\frac{1+1+4n}{2} = (n+1)(2n+1)$. $2n^2 + 3n + 1 = 1\,225 \iff 2n^2 + 3n - 1\,224 = 0$, $\Delta = 9\,801 = 99^2$, $n = \frac{-3+99}{4} = 24$ (l'autre racine est négative) ; contrôle : $25 \times 49 = 1\,225$. (1)

Repère — Dans une somme, on compte toujours les termes par la formule $q - p + 1$ avant d'appliquer la moyenne du premier et du dernier.

Exercice 4 – Un entraînement progressif

(4 pts)

- a) Suite arithmétique de raison 1,8 commençant au rang 1 : $d_n = 12 + 1,8(n-1) = 10,2 + 1,8n$. (1)
- b) $10,2 + 1,8n \geq 50 \iff n \geq \frac{39,8}{1,8} \approx 22,1$; $d_{22} = 49,8$ et $d_{23} = 51,6$: à partir de la 23^e semaine. (1)
- c) $d_{23} = 51,6$; 23 termes : $23 \times \frac{12+51,6}{2} = 23 \times 31,8 = 731,4$ km. (1)
- d) La boucle s'arrête au premier $d \geq 50$: elle renvoie 23. Avec $d \leq 50$, elle chercherait $d > 50$; ici le résultat serait encore 23, car aucune semaine ne donne exactement 50 km. (1)

Le point clé — Une boucle de seuil traduit l'inéquation : la condition du while est la négation de ce que l'on cherche.

Exercice 5 – Démontrer et corriger*(4 pts)*

- a) $S = 1 + \dots + n$ et $S = n + \dots + 1$; en additionnant terme à terme, n colonnes valant chacune $n + 1$: $2S = n(n + 1)$, donc $S = \frac{n(n+1)}{2}$. (1)
- b) $u_n = 8n + 16$, donc $u_{n+1} - u_n = 8$: arithmétique de raison 8, $u_0 = 16$. (1)
- c) Le dernier terme de la somme est u_9 , pas u_{10} (10 termes, de u_0 à u_9). $u_9 = 88$: somme = $10 \times \frac{16+88}{2} = 520$. (1)
- d) $w_n = 8(2n) + 16 = 16n + 16$; $w_{n+1} - w_n = 16$: arithmétique de raison 16 = 2×8 , $w_0 = 16$. (1)

Attention — Dans la formule de somme, le « dernier terme » est celui qui figure réellement dans la somme, et son rang fixe le nombre de termes.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).