Signe du trinôme et inéquations

Fiche méthode

(Spécialité maths 1re · Algèbre · Second degré)

La démarche pour une inéquation du second degré

1. Je compare à 0 : tout dans un membre, je développe et je réduis ; s'il y a un dénominateur, je note les valeurs interdites et je réduis au même dénominateur.

2. Je trouve les racines : forme factorisée lue directement, sinon $\Delta = b^2 - 4ac$.

3. Je dresse le tableau de signes : « signe de a à l'extérieur des racines » pour un trinôme, une ligne par facteur pour un produit ou un quotient.

4. Je lis les solutions : inégalité stricte, racines exclues ; large, racines incluses ; valeur interdite, toujours exclue.

Le réflexe — la réponse se justifie par trois éléments écrits : les racines, le signe de a et la règle « signe de a à l'extérieur des racines » ; un ensemble de solutions sans ces justifications ne rapporte pas tous les points.

Cas 1 · Signe d'un trinôme

Réflexe — je repère a, je cherche les racines, puis signe de a à l'extérieur, signe de −a entre.

Exemple. Questions types : « Étudier le signe de $f(x)$ », « Dresser le tableau de signes ». Exemple : $f(x) = -x^2 + 2x + 8$.

$\Delta = 2^2 - 4 \times (-1) \times 8 = 4 + 32 = 36 > 0$: racines $\dfrac{-2-6}{-2} = 4$ et $\dfrac{-2+6}{-2} = -2$.

$a = -1 < 0$: $f(x)$ est négatif sur $]-\infty\,;-2[$ et sur $]4\,;+\infty[$, positif sur $]-2\,;4[$, nul en -2 et en 4.

Attention — avec a < 0, c'est « négatif à l'extérieur » ; et $\Delta > 0$ ne veut pas dire « positif ».

Cas 2 · Inéquation du second degré

Réflexe — tout dans un membre, racines, tableau, puis crochets selon l'inégalité.

Exemple. Questions types : « Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation… ». Exemple : $2x^2 + x \geqslant 3$.

$2x^2 + x \geqslant 3 \iff 2x^2 + x - 3 \geqslant 0$. $\Delta = 1 + 24 = 25$: racines $\dfrac{-1-5}{4} = -\dfrac{3}{2}$ et $\dfrac{-1+5}{4} = 1$.

$a = 2 > 0$: positif ou nul à l'extérieur, racines incluses. $S = \left]-\infty\,;-\dfrac{3}{2}\right] \cup [1\,;+\infty[$.

Attention — ne jamais diviser par x ni « prendre la racine » : $x^2 > 9$ ne donne pas $x > 3$.

Cas 3 · Produit ou quotient

Réflexe — valeurs interdites, une ligne par facteur, règle des signes, double barre.

Exemple. Questions types : « Dresser le tableau de signes de $P(x)$ », « Résoudre $\dfrac{\cdots}{\cdots} \leqslant 0$ ». Exemple : $\dfrac{x^2 + 2x}{x - 1} \leqslant 0$.

Valeur interdite : 1. Numérateur $x(x+2)$: racines -2 et 0, négatif entre. Dénominateur : négatif avant 1.

Quotient : − sur $]-\infty\,;-2[$, + sur $]-2\,;0[$, − sur $]0\,;1[$, + après 1. $S =]-\infty\,;-2] \cup [0\,;1[$.

Attention — on ne multiplie pas par le dénominateur : son signe change.

Cas 4 · Position relative de deux courbes

Réflexe — signe de f(x) − g(x) : positif, la courbe de f est au-dessus ; nul, point commun.

Exemple. Questions types : « Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ », « Coordonnées des points d'intersection ». Exemple : $f(x) = x^2 - 4$ et $g(x) = 3x + 6$.

$f(x) - g(x) = x^2 - 3x - 10 = (x+2)(x-5)$ (racines -2 et 5, $\Delta = 49$).
$\mathcal{C}_f$ est en dessous de $\mathcal{C}_g$ sur $]-2\,;5[$, au-dessus à l'extérieur. Points communs : $(-2\,;0)$ et $(5\,;21)$, car $g(-2) = 0$ et $g(5) = 21$.

Attention — l'ordre de la soustraction décide quelle courbe est au-dessus ; un point commun a deux coordonnées.

Cas 5 · Signe constant, paramètre

Réflexe — « pour tout réel x » : signe de a ET $\Delta < 0$, puis inéquation d'inconnue m.

Exemple. Questions types : « Pour quelles valeurs de m a-t-on … pour tout réel x ? ». Exemple : $x^2 + 2(m-1)x + 4 > 0$ pour tout x.

$a = 1 > 0$: il faut $\Delta < 0$. $\Delta = 4(m-1)^2 - 16 = 4\left[(m-1)^2 - 4\right] = 4(m-3)(m+1)$.
Trinôme en m de racines -1 et 3, coefficient positif : négatif entre. Donc $m \in]-1\,;3[$.

Attention — $\Delta < 0$ seul ne suffit pas, il faut aussi le bon signe de a ; si a dépend de m, la valeur qui l'annule se traite à part.

Les pièges

- Le signe de Δ n'est pas le signe du trinôme : Δ dit combien il y a de racines.
- Un crochet est toujours ouvert en $-\infty$, en $+\infty$ et sur une valeur interdite.
- Multiplier ou diviser par un nombre négatif change le sens de l'inégalité.
- $x^2 < k$ ($k > 0$) donne $]-\sqrt{k}\,;\sqrt{k}[$, pas « $x < \sqrt{k}$ ».
- Pour un point commun, on calcule aussi l'ordonnée, avec f ou avec g.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).