

Corrigé et barème – Second degré : signe du trinôme et inéquations

Signe de $ax^2 + bx + c$ selon le discriminant, tableau de signes, résolution d'inéquations du second degré, inéquations produit et quotient, position relative de deux courbes, problèmes d'optimisation simples

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques 1^{re}

Exercice 1 – Signe de trinômes

(4 pts)

- a) $\Delta = 16 + 84 = 100$, racines $\frac{-4 \pm 10}{2} : -7$ et 3 ; $a > 0$: positif sur $] - \infty ; -7[\cup] 3 ; +\infty[$, négatif sur $] -7 ; 3[$. (1)
- b) $\Delta = 144 - 144 = 0$; $-3x^2 + 12x - 12 = -3(x - 2)^2$: négatif sur $\mathbb{R}$, nul seulement en 2. (1)
- c) $\Delta = 16 - 40 = -24 < 0$ et $a = 5 > 0$: strictement positif pour tout réel x . (1)
- d) D'après a) : $S =] - \infty ; -7[\cup] 3 ; +\infty[$ (racines incluses). (1)

Erreur fréquente — Un discriminant nul donne un trinôme de signe constant qui s'annule une fois : ce n'est pas « aucune racine ».

Exercice 2 – Inéquations du second degré

(4 pts)

- a) $x^2 - 3x = x(x - 3) \leq 0$ entre les racines 0 et 3 : $S = [0 ; 3]$ (diviser par x aurait perdu 0). (1)
- b) $\Delta = 4 + 60 = 64$, racines $\frac{-2 \pm 8}{6} : -\frac{5}{3}$ et 1 ; $a > 0$: $S =] - \infty ; -\frac{5}{3}[\cup] 1 ; +\infty[$. (1)
- c) $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$ et $a = -1 < 0$: trinôme toujours négatif, $S = \emptyset$. (1)
- d) $x^2 + 2x - 11 \geq 0$, $\Delta = 48$, racines $-1 \pm 2\sqrt{3}$: $S =] - \infty ; -1 - 2\sqrt{3}] \cup [-1 + 2\sqrt{3} ; +\infty[$. (1)

À retenir — Avant tout calcul de discriminant, on ramène l'inéquation à une comparaison d'un trinôme avec 0.

Exercice 3 – Produit et quotient

(4 pts)

- a) $x^2 - 6x + 5$: racines 1 et 5, négatif entre ; $3 - x > 0$ pour $x < 3$. $P(x) : +$ sur $] - \infty ; 1[$, $-$ sur $] 1 ; 3[$, $+$ sur $] 3 ; 5[$, $-$ sur $] 5 ; +\infty[$; nul en 1, 3, 5. (1)
- b) $S =] - \infty ; 1[\cup] 3 ; 5[$. (1)
- c) Valeur interdite -2. Quotient : $-$ sur $] - \infty ; -2[$, $+$ sur $] -2 ; 1[$, $-$ sur $] 1 ; 5[$, $+$ sur $] 5 ; +\infty[$. $S =] - \infty ; -2[\cup] 1 ; 5[$. (1)
- d) Pour $x = -3$: $\frac{9+18+5}{-1} = -32 < 0$, donc -3 est solution, alors que $x^2 - 6x + 5 = 32 > 0$. Multiplier par $x + 2 < 0$ inverse l'inégalité. (1)

Attention — On ne multiplie jamais une inéquation par une expression dont on ignore le signe : on étudie le signe du quotient.

Exercice 4 – Position relative

(4 pts)

- a) $f(x) - g(x) = 2x^2 - 4x - 6$ et $2(x - 3)(x + 1) = 2(x^2 - 2x - 3) = 2x^2 - 4x - 6$. (1)
- b) $x = 3$ ou $x = -1$; $g(-1) = 6$, $g(3) = 10$: points $(-1 ; 6)$ et $(3 ; 10)$. (1)
- c) $a = 2 > 0$: $\mathcal{C}_f$ au-dessus sur $] - \infty ; -1[\cup] 3 ; +\infty[$, en dessous sur $] -1 ; 3[$. (1)
- d) $f(x) - h(x) = x^2 - 3$, racines $\pm\sqrt{3}$: $\mathcal{C}_f$ au-dessus hors de $[-\sqrt{3} ; \sqrt{3}]$, en dessous sur $] -\sqrt{3} ; \sqrt{3}[$. (1)

Le point clé — La position relative se lit toujours sur le signe de la différence $f(x) - g(x)$, jamais sur un simple dessin.

Exercice 5 – Un jardin rectangulaire**(4 pts)**

- a) Demi-périmètre 13 : l'autre côté mesure $13 - x$, avec $x > 0$ et $13 - x > 0$. $A(x) = x(13 - x) = -x^2 + 13x$. (1)
- b) $a < 0$: maximum en $\alpha = \frac{13}{2} = 6,5$; $A(6,5) = 42,25 \text{ m}^2$ (le jardin est un carré). (1)
- c) $x^2 - 13x + 36 \leq 0$, $\Delta = 169 - 144 = 25$, racines 4 et 9 : $x \in [4; 9]$. (1)
- d) $x^2 - 13x + 42,5 = 0$: $\Delta = 169 - 170 = -1 < 0$, pas de solution ; cohérent avec le maximum 42,25 m^2 . (1)

Astuce — Le signe du discriminant de $A(x) - k$ indique immédiatement si l'aire k peut être atteinte.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).