

Produit scalaire

Le produit scalaire transforme les questions d'angles, de perpendicularité et de longueurs en calculs algébriques : il faut savoir le calculer de trois façons, développer avec la bilinéarité et l'appliquer à Al-Kashi et aux cercles.

1 Définitions

- **Produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (non nuls) : le réel $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \theta$, où $\theta \in [0; \pi]$ est l'angle des deux vecteurs. Si l'un est nul, le produit scalaire vaut 0.
- **Carré scalaire** : $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.
- **Vecteurs orthogonaux** : $\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ (le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur).

2 Trois formules de calcul

- **Avec l'angle** : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$.
- **Avec les coordonnées** (repère orthonormé) : $\vec{u}(x; y), \vec{v}(x'; y') \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$ et $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- **Avec le projeté orthogonal H de C sur (AB)** : $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AH}$ (signe + si H et B sont du même côté de A).

3 Propriétés

- **Symétrie** : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.
- **Bilinéarité** : $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$; $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$.
- **Identités remarquables** : $\|\vec{u} \pm \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \pm 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$; $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$.
- **Polarisation** : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$.

4 Applications géométriques

- **Angle** : $\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$; dans un triangle, $\cos \widehat{BAC} = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{AB \times AC}$.
- **Al-Kashi** : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}$ (Pythagore si $\widehat{A} = 90^\circ$). Sert à trouver un côté (deux côtés + angle compris) ou un angle (trois côtés).
- **Cercle de diamètre [AB]** : ensemble des M tels que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$. Avec I milieu de [AB] : $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$.

5 Méthodes

1. **Calculer un produit scalaire** : repérer les données (angle, coordonnées, figure), appliquer la formule adaptée, contrôler le signe de l'angle.
2. **Prouver une perpendicularité** : calculer le produit scalaire de deux vecteurs directeurs issus du même point et montrer qu'il est nul.
3. **Calculer un angle** : produit scalaire et normes, puis $\cos^{-1}$ en mode degrés.
4. **Ensemble** $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = k$: poser $M(x; y)$, développer, forme canonique $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r$; cercle si $r > 0$, point si $r = 0$, vide si $r < 0$.

6 Pièges

- Le produit scalaire est un **nombre** : $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w}$ n'existe pas.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ n'implique pas qu'un vecteur soit nul.
- $xx' + yy'$ exige un repère **orthonormé**.
- L'angle de $\vec{AB}$ et $\vec{BC}$ est le supplémentaire de $\widehat{ABC}$.
- Cosinus négatif $\Rightarrow$ angle obtus : ne pas perdre le signe dans Al-Kashi.
- $\|\vec{u} + \vec{v}\| \neq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$: passer par le carré.

L'ESSENTIEL

— $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta = xx' + yy'$ en repère orthonormé.
 — $\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$;
 — $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.

— $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$.
 — Al-Kashi : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}$.
 — M est sur le cercle de diamètre [AB] $\iff \vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$.