

Devoir surveillé – Produit scalaire

Définition, propriétés et applications géométriques — programme de Spécialité Mathématiques 1re (lycée général)

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques 1^{re}

Nom : _____

Date : _____

Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Trois façons de calculer

(4 pts)

- a) a) $\|\vec{u}\| = \sqrt{6}$, $\|\vec{v}\| = 2\sqrt{2}$ et l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ mesure 45° . Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ (valeur exacte).
- b) b) Dans un repère orthonormé, $\vec{u}(-3; 7)$ et $\vec{v}(5; 2)$. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
- c) c) $ABCD$ est un losange de côté 6 tel que $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.
- d) d) Dans ce même losange, calculer $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$ en justifiant.

Exercice 2 – Triangle en repère

(4 pts)

Dans un repère orthonormé, on donne $A(-3; 1)$, $B(1; 4)$ et $C(4; 0)$.

- a) a) Montrer que le triangle ABC est rectangle en B .
- b) b) Préciser la nature complète du triangle ABC en justifiant.
- c) c) Calculer la mesure exacte de l'angle $\widehat{BAC}$ à l'aide d'un produit scalaire.
- d) d) Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un carré.

Exercice 3 – Bilinéarité

(4 pts)

On donne $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 4$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = -6$.

- a) a) Déterminer la mesure de l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
- b) b) Calculer $\|\vec{u} + \vec{v}\|$.
- c) c) Calculer $\|2\vec{u} - \vec{v}\|$.
- d) d) Déterminer le réel k tel que les vecteurs $\vec{u} + k\vec{v}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.

Exercice 4 – Théorème d'Al-Kashi

(4 pts)

Dans un triangle ABC , $AB = 8$, $AC = 5$ et $\widehat{BAC} = 100^\circ$. Les longueurs sont arrondies au centième, les angles au dixième de degré.

- a) a) Calculer BC .
- b) b) Calculer la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$.
- c) c) En déduire la mesure de l'angle $\widehat{ACB}$.
- d) d) Un élève a obtenu $BC \approx 8,67$ à la question a). Identifier son erreur.

Exercice 5 – Ensemble de points*(4 pts)*

Dans un repère orthonormé, on donne $A(2; -1)$ et $B(6; 3)$. Pour tout point $M(x; y)$, on pose $h(M) = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$.

- a) a) Montrer que $h(M) = x^2 + y^2 - 8x - 2y + 9$.
- b) b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble E des points M tels que $h(M) = 0$.
- c) c) Le point O , origine du repère, appartient-il à E ? Est-il à l'intérieur ou à l'extérieur de E ?
- d) d) Déterminer l'ensemble F des points M tels que $h(M) = -8$.

Bon courage !