

Corrigé et barème – Produit scalaire

Définition, propriétés et applications géométriques — programme de Spécialité Mathématiques 1re (lycée général)

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques 1^{re}

Exercice 1 – Trois façons de calculer

(4 pts)

- a) $\sqrt{6} \times 2\sqrt{2} \times \cos 45^\circ = \sqrt{6} \times 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{6} \times 2 = 2\sqrt{6} (\approx 4,9).$ (1)
- b) $(-3) \times 5 + 7 \times 2 = -15 + 14 = -1.$ (1)
- c) $AB \times AD \times \cos \widehat{BAD} = 6 \times 6 \times \frac{1}{2} = 18.$ (1)
- d) Les diagonales d'un losange sont perpendiculaires, donc $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont orthogonaux : $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0.$ (Vérification : $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = AD^2 - AB^2 = 0.$) (1)

Le point clé — Choisir la formule adaptée aux données : normes et angle, coordonnées en repère orthonormé, ou propriété géométrique de la figure.

Exercice 2 – Triangle en repère

(4 pts)

- a) $\overrightarrow{BA}(-4; -3), \overrightarrow{BC}(3; -4) : \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -12 + 12 = 0$, donc l'angle en B est droit. (1)
- b) $BA = \sqrt{16 + 9} = 5$ et $BC = \sqrt{9 + 16} = 5$: le triangle est rectangle isocèle en B . (1)
- c) $\overrightarrow{AB}(4; 3), \overrightarrow{AC}(7; -1), \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 28 - 3 = 25 ; AB = 5, AC = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} ; \cos \widehat{BAC} = \frac{25}{25\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, donc $\widehat{BAC} = 45^\circ.$ (1)
- d) $ABCD$ carré $\iff \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ (le triangle étant déjà rectangle isocèle) : $D(-3 + 3; 1 - 4) = D(0; -3).$ Contrôle : $\overrightarrow{AD}(3; -4)$ et $\overrightarrow{AB}(4; 3)$ sont orthogonaux et de même norme 5. (1)

Repère — En géométrie repérée, « rectangle en B » se prouve avec les vecteurs issus de B, jamais avec des vecteurs d'origines différentes.

Exercice 3 – Bilinearité

(4 pts)

- a) $\cos \theta = \frac{-6}{3 \times 4} = -\frac{1}{2}$, donc $\theta = 120^\circ.$ (1)
- b) $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = 9 + 2 \times (-6) + 16 = 13$, donc $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{13}.$ (1)
- c) $\|2\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 4\|\vec{u}\|^2 - 4\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = 36 + 24 + 16 = 76$, donc $\|2\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}.$ (1)
- d) $(\vec{u} + k\vec{v}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v} + k\|\vec{v}\|^2 = -6 + 16k = 0 \iff k = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}.$ (1)

Astuce — Pour une norme, on calcule toujours le carré par l'identité remarquable, puis on prend la racine à la fin.

Exercice 4 – Théorème d’Al-Kashi

(4 pts)

- a) $BC^2 = 64 + 25 - 2 \times 8 \times 5 \times \cos 100^\circ = 89 - 80 \times (-0,1736) \approx 89 + 13,89 = 102,89$, donc $BC \approx 10,14$. (1)
- b) $\cos \widehat{ABC} = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \times AB \times BC} = \frac{64 + 102,89 - 25}{2 \times 8 \times 10,14} = \frac{141,89}{162,24} \approx 0,8746$, donc $\widehat{ABC} \approx 29,0^\circ$. (1)
- c) $\widehat{ACB} = 180^\circ - 100^\circ - 29,0^\circ = 51,0^\circ$ (cohérent : le plus grand des deux angles restants est opposé au plus grand côté AB). (1)
- d) Il a pris $\cos 100^\circ$ positif : $89 - 13,89 = 75,11$ et $\sqrt{75,11} \approx 8,67$. Or 100° est obtus, donc $\cos 100^\circ < 0$: le terme $-2bc \cos \hat{A}$ est positif et s’ajoute. Contrôle : avec un angle droit en A on aurait $BC = \sqrt{89} \approx 9,43$; un angle plus grand donne un côté opposé plus grand, donc $BC > 9,43$. (1)

Erreur fréquente — Un angle obtus a un cosinus négatif : dans Al-Kashi, le terme correctif devient alors positif et la longueur opposée est la plus grande du triangle.

Exercice 5 – Ensemble de points

(4 pts)

- a) $\overrightarrow{MA}(2-x; -1-y)$, $\overrightarrow{MB}(6-x; 3-y)$; $(2-x)(6-x) = x^2 - 8x + 12$ et $(-1-y)(3-y) = y^2 - 2y - 3$; somme : $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 9$. (1)
- b) $h(M) = 0 \iff (x-4)^2 - 16 + (y-1)^2 - 1 + 9 = 0 \iff (x-4)^2 + (y-1)^2 = 8$: cercle de centre $I(4; 1)$ (milieu de $[AB]$) et de rayon $2\sqrt{2} = \frac{AB}{2}$. (1)
- c) $h(O) = 9 \neq 0$: $O \notin E$. $OI^2 = 16 + 1 = 17 > 8$, donc $OI > R$: O est à l’extérieur de E . (1)
- d) $h(M) = -8 \iff (x-4)^2 + (y-1)^2 - 8 = -8 \iff (x-4)^2 + (y-1)^2 = 0 \iff M = I$: F est réduit au point $I(4; 1)$. (1)

Attention — Après la forme canonique, discuter le signe du second membre : positif $\rightarrow$ cercle, nul $\rightarrow$ un point, négatif $\rightarrow$ ensemble vide.