Indépendance et épreuves répétées

Fiche méthode

(Spécialité maths 1re · Probabilités · Indépendance)

La démarche face à un exercice d'indépendance

1. Je nomme les événements (lettres, contraires) et je relève ce que donne l'énoncé : probabilités, effectifs, « indépendamment », « avec remise ».

2. Je décide si j'ai le droit de multiplier : indépendance donnée, épreuves indépendantes par la situation, ou indépendance à démontrer par le test du produit.

3. Je traduis la question : « aucun », « au moins un », « un seul », « exactement k », « au plus » ; je passe par le contraire quand il est plus court.

4. Je calcule et je contrôle : chemins de l'arbre, somme des probabilités égale à 1, résultat entre 0 et 1.

Le réflexe — chaque produit de probabilités se justifie par une phrase (« car A et B sont indépendants », « les tirages se font avec remise ») : sans elle, le calcul ne rapporte pas tous les points.

Cas 1 · Démontrer que deux événements sont (ou non) indépendants

Réflexe — je calcule $\mathrm{P(A)}$, $\mathrm{P(B)}$ et $\mathrm{P(A \cap B)}$, puis le produit $\mathrm{P(A)} \times \mathrm{P(B)}$, et je compare.

Exemple. Questions types : « A et B sont-ils indépendants ? Justifier. » Exemple : $P(A) = 0{,}45$, $P(B) = 0{,}4$ et $P(A \cap B) = 0{,}18$.

On calcule le produit : $P(A) \times P(B) = 0{,}45 \times 0{,}4 = 0{,}18$.

On compare : $P(A) \times P(B) = P(A \cap B)$.

Conclusion : les événements A et B sont indépendants.

Attention — « indépendants » ne veut pas dire « incompatibles » : $\mathrm{P(A \cap B)} = 0$ signifie incompatibles.

Cas 2 · Calculer « au moins un » ou « aucun » avec des contraires

Réflexe — $\bar{\mathrm{A}}$ et $\bar{\mathrm{B}}$ sont indépendants : $\mathrm{P}(\bar{\mathrm{A}} \cap \bar{\mathrm{B}}) = \mathrm{P}(\bar{\mathrm{A}}) \times \mathrm{P}(\bar{\mathrm{B}})$, puis $\mathrm{P(A \cup B)} = 1 - \mathrm{P}(\bar{\mathrm{A}} \cap \bar{\mathrm{B}})$.

Exemple. Questions types : « Calculer la probabilité qu'au moins un des deux événements se réalise. » Exemple : A et B indépendants, $P(A) = 0{,}25$ et $P(B) = 0{,}7$.

Par indépendance, $P(A \cap B) = 0{,}25 \times 0{,}7 = 0{,}175$.

Donc $P(A \cup B) = 0{,}25 + 0{,}7 - 0{,}175 = 0{,}775$.

Contrôle par les contraires, indépendants eux aussi : $1 - 0{,}75 \times 0{,}3 = 1 - 0{,}225 = 0{,}775$.

Attention — $\mathrm{P(A \cup B)} \neq \mathrm{P(A)} + \mathrm{P(B)}$ dès que A et B peuvent se produire ensemble.

Cas 3 · Deux épreuves indépendantes

Réflexe — je justifie l'indépendance par la situation, je dessine l'arbre (mêmes probabilités au second niveau) et j'additionne les chemins utiles.

Exemple. Questions types : « Construire l'arbre », « Calculer la probabilité qu'exactement un des deux… ». Exemple : un bus est à l'heure avec la probabilité 0,8, un train avec la probabilité 0,9, indépendamment.

« Exactement un à l'heure » : deux chemins, (bus à l'heure, train en retard) et (bus en retard, train à l'heure).

Probabilité : $0{,}8 \times 0{,}1 + 0{,}2 \times 0{,}9 = 0{,}08 + 0{,}18 = 0{,}26$.

Attention — « un et un seul » correspond à deux chemins : l'ordre des épreuves compte.

Cas 4 · Exactement k succès (n ⩽ 4)

Réflexe — je compte les chemins à k succès, je calcule $p^k(1-p)^{n-k}$ et je multiplie.

Exemple. Questions types : « Calculer la probabilité d'obtenir exactement k succès. » Exemple : $n = 3$, $p = 0{,}25$, $k = 1$.

Trois chemins comportent un seul succès : $S\overline{S}\,\overline{S}$, $\overline{S}S\overline{S}$, $\overline{S}\,\overline{S}S$.
Chacun a pour probabilité $0{,}25 \times 0{,}75^2 = 0{,}140625$.
Probabilité cherchée : $3 \times 0{,}140625 = 0{,}421875$.

Attention — oublier des chemins : « deux succès sur trois » correspond à trois chemins.

Cas 5 · Au moins un succès, au plus, paramètre

Réflexe — au moins un $= 1 - (1-p)^n$; au plus k = somme des cas de 0 à k ; une probabilité connue donne une équation en p.

Exemple. Questions types : « Probabilité d'au moins un succès », « Déterminer p ». Exemple : $n = 4$, $p = 0{,}1$.

Le contraire de « au moins un succès » est « aucun succès » : un seul chemin, de probabilité $0{,}9^4 = 0{,}6561$.
Donc $P(\text{au moins un succès}) = 1 - 0{,}6561 = 0{,}3439$.

Attention — $n \times p$ n'est pas une probabilité : il peut dépasser 1.

Les pièges

- Multiplier $P(A) \times P(B)$ sans avoir l'indépendance (donnée ou démontrée).
- Confondre indépendants ($P(A \cap B) = P(A)P(B)$) et incompatibles ($P(A \cap B) = 0$).
- Tirages sans remise : les épreuves ne sont pas indépendantes.
- $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ n'est pas $1 - P(A \cap B)$: c'est $1 - P(A \cup B)$.
- Écrire p pour l'échec : sa probabilité est $1 - p$.
- « Au moins deux sur trois » = deux ou trois succès : ne pas oublier le cas « trois ».

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).