

Probabilités conditionnelles et indépendance

Mettre à jour une probabilité grâce à une information (« sachant que »), lire et construire un arbre pondéré, appliquer la formule des probabilités totales et décider si deux événements sont indépendants.

1 Définitions

- **Probabilité conditionnelle** ($P(A) \neq 0$) : $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$, probabilité de **B** sachant **A**.
- **Indépendance** : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, soit $P_A(B) = P(B)$.
- **Partition** de Ω : événements deux à deux incompatibles, de réunion Ω (ex. $A, \overline{A}$).
- **Épreuve de Bernoulli** : succès (p), échec ($1-p$).

2 Formules

- Probabilités composées : $P(A \cap B) = P(A) P_A(B)$.
- Probabilités totales : $P(B) = P(A)P_A(B) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B)$.
- Remonter l'arbre : $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.
- $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$.
- n épreuves indépendantes : un chemin à k succès vaut $p^k(1-p)^{n-k}$; « au moins un succès » $= 1 - (1-p)^n$.

3 Arbre pondéré

- Niveau 1 : probabilités simples ; niveaux suivants : conditionnelles.
- Somme 1 à chaque nœud ; produit le long d'un chemin ; somme des chemins menant à l'événement.
- Sans remise : le dénominateur diminue de 1 à chaque niveau.

4 Méthodes

1. **Tableau croisé** : compléter les totaux, restreindre à la ligne ou colonne connue, diviser.
2. **Arbre** : « parmi les **A**, $x\%$ sont **B** » se traduit par $P_A(B) = x/100$; probabilités totales pour $P(B)$, quotient pour $P_B(A)$.
3. **Indépendance** : comparer $P(A \cap B)$ (via $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ si besoin) et $P(A)P(B)$.
4. **Épreuves répétées** : nombre de chemins à k succès $\times p^k(1-p)^{n-k}$; contraire pour « au moins un ».

5 Pièges

- « Parmi », « sachant » annoncent $P_A(B)$, pas $P(A \cap B)$.
- $P_A(B) \neq P_B(A)$: même numérateur, dénominateurs différents (faux positifs).
- Incompatibles de probabilités non nulles $\Rightarrow$ jamais indépendants.
- « Exactement k succès » : ne pas oublier le nombre de chemins.

L'ESSENTIEL

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \text{ et } P(A \cap B) = P(A) P_A(B).$$

— Arbre : somme 1 par nœud, produit sur un chemin, somme des chemins.

$$P(B) = P(A)P_A(B) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B).$$

— Indépendants $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B) \Leftrightarrow P_A(B) = P(B)$; alors $\overline{A}$ et **B** aussi.

— Incompatibles $\neq$ indépendants ; $P_A(B) \neq P_B(A)$.