

Corrigé et barème – Probabilités conditionnelles et indépendance

Probabilité d'un événement sachant un autre, formule des probabilités totales et indépendance — programme de 1re Spé Maths

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques 1^{re}

Exercice 1 – Exercice 1 — Tableau croisé dans un club sportif (4 pts)

- a) a) Adultes loisir : $120 - 84 = 36$; jeunes loisir : $80 - 56 = 24$; total compétition : $84 + 56 = 140$; total loisir : $36 + 24 = 60$. (1)
- b) b) $P(C) = \frac{140}{200} = 0,7$; $P(J \cap C) = \frac{56}{200} = 0,28$. (1)
- c) c) $P_J(C) = \frac{56}{80} = 0,7$; $P_C(J) = \frac{56}{140} = 0,4$: parmi les licenciés compétition, 40 % sont des jeunes. (1)
- d) d) $P(J) = \frac{80}{200} = 0,4$ et $P(J) \times P(C) = 0,4 \times 0,7 = 0,28 = P(J \cap C)$: J et C sont indépendants (on a aussi $P_J(C) = P(C) = 0,7$). (1)

Le point clé — L'indépendance se prouve par un calcul, jamais par intuition : ici les jeunes ont exactement la même proportion de licences compétition que l'ensemble du club.

Exercice 2 – Exercice 2 — Reprise des plants d'une pépinière (4 pts)

- a) a) Premier niveau : $P(A) = 0,65$, $P(B) = 0,35$. Second niveau : $P_A(R) = 0,92$, $P_A(\overline{R}) = 0,08$; $P_B(R) = 0,84$, $P_B(\overline{R}) = 0,16$. (1)
- b) b) $P(A \cap \overline{R}) = 0,65 \times 0,08 = 0,052$. (1)
- c) c) Probabilités totales : $P(R) = 0,65 \times 0,92 + 0,35 \times 0,84 = 0,598 + 0,294 = 0,892$. (1)
- d) d) $P(\overline{R}) = 0,108$ et $P(B \cap \overline{R}) = 0,35 \times 0,16 = 0,056$; $P_{\overline{R}}(B) = \frac{0,056}{0,108} = \frac{56}{108} = \frac{14}{27} \approx 0,519$. (1)

Erreur fréquente — Pour « remonter » l'arbre, le dénominateur est $P(\overline{R})$ obtenu par les probabilités totales, pas la probabilité d'une seule branche.

Exercice 3 – Exercice 3 — Deux événements indépendants (4 pts)

- a) a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = 0,36 + P(B) - 0,36P(B) = 0,36 + 0,64P(B)$. (1)
- b) b) $0,36 + 0,64P(B) = 0,712$ donc $0,64P(B) = 0,352$ et $P(B) = 0,55$. (1)
- c) c) Première façon : $\overline{A} \cap \overline{B}$ est le contraire de $A \cup B$, donc $P = 1 - 0,712 = 0,288$. Seconde façon : $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants, donc $P = 0,64 \times 0,45 = 0,288$. (1)
- d) d) A et B indépendants $\Rightarrow A$ et $\overline{B}$ indépendants $\Rightarrow P_{\overline{B}}(A) = P(A) = 0,36$. (1)

À retenir — Si deux événements sont indépendants, leurs contraires le sont aussi, et toute probabilité conditionnelle entre eux se ramène à une probabilité simple.

Exercice 4 – Exercice 4 — Lancers francs (4 pts)

- a) a) $0,65^4 = 0,17850625 \approx 0,179$. (1)
- b) b) 4 chemins à 3 succès : $4 \times 0,65^3 \times 0,35 = 4 \times 0,274625 \times 0,35 \approx 0,384$. (1)
- c) c) $1 - 0,35^4 = 1 - 0,01500625 \approx 0,985$. (1)
- d) d) $\frac{0,17850625}{0,98499375} \approx 0,181$. (1)

Attention — « Exactement 3 succès sur 4 » se réalise par 4 chemins différents : la probabilité $0,65^3 \times 0,35$ n'est celle que d'un seul d'entre eux.

Exercice 5 – Exercice 5 — Contrôle antidopage*(4 pts)*

- a) a) $P(T) = 0,03 \times 0,96 + 0,97 \times 0,02 = 0,0288 + 0,0194 = 0,0482$. (1)
- b) b) $P_T(D) = \frac{0,0288}{0,0482} \approx 0,598$. (1)
- c) c) 96 % est $P_D(T)$ (part des dopés détectés), pas $P_T(D)$ (part des positifs réellement dopés). Comme les non-dopés sont environ 32 fois plus nombreux, leurs 2 % de faux positifs (0,0194) sont presque aussi nombreux que les vrais positifs (0,0288) : environ 40 % des contrôles positifs concernent des sportifs non dopés. (1)
- d) d) $P(\overline{T}) = 1 - 0,0482 = 0,9518$ et $P(D \cap \overline{T}) = 0,03 \times 0,04 = 0,0012$; $P_{\overline{T}}(D) = \frac{0,0012}{0,9518} \approx 0,0013$. (1)

Repère — Quand l'événement recherché est rare, même un très bon test produit beaucoup de faux positifs : $P_T(D)$ et $P_D(T)$ n'ont rien à voir.