Logique, raisonnement et listes Python

Fiche méthode

(Spécialité maths 1re · Vocabulaire ensembliste et logique · Listes)

La démarche face à une question de logique

1. Je réécris l'énoncé en faisant apparaître les quantificateurs cachés (« pour tout », « il existe ») et la forme : implication, équivalence, « et », « ou ».

2. Je choisis l'outil : contre-exemple pour réfuter un « pour tout », exemple pour prouver un « il existe », raisonnement direct, contraposée, absurde ou disjonction des cas pour démontrer.

3. J'annonce la méthode dès la première ligne (« raisonnons par contraposée… »), puis chaque ligne découle de la précédente.

4. Je conclus par une phrase qui répond à la question : vraie ou fausse, condition nécessaire ou suffisante, contenu de la liste.

Le réflexe — une affirmation sans justification ne rapporte rien : un exemple ne démontre jamais un « pour tout », et la méthode doit être nommée.

Cas 1 · Condition nécessaire, condition suffisante

Réflexe — j'écris P $\Rightarrow$ Q et Q $\Rightarrow$ P et je teste chacune ; départ d'une implication vraie = suffisante, arrivée = nécessaire.

Exemple. Questions types : « Compléter par nécessaire ou suffisante », « Est-ce une condition nécessaire et suffisante ? ». Exemple : « n est multiple de 9 » et « n est multiple de 3 ».

Si $n = 9k$, alors $n = 3 \times 3k$ est multiple de 3 : l'implication est vraie.

La réciproque est fausse : 6 est multiple de 3 sans être multiple de 9.

« Multiple de 9 » est donc une condition suffisante, non nécessaire, pour « multiple de 3 » ; « multiple de 3 » est une condition nécessaire, non suffisante, pour « multiple de 9 ».

Attention — « il faut » = nécessaire, « il suffit » = suffisante ; une implication vraie ne dit rien de sa réciproque.

Cas 2 · Nier une proposition quantifiée

Réflexe — « pour tout » $\leftrightarrow$ « il existe », même ordre, même ensemble, propriété finale niée.

Exemple. Question type : « Écrire la négation, puis dire laquelle est vraie ». Exemple : « pour tout réel x de $[0\,;2]$, $x^2 \leqslant 2x$ ».

Négation : « il existe un réel x de $[0\,;2]$ tel que $x^2 > 2x$ ».

Pour x dans $[0\,;2]$: $x^2 - 2x = x(x-2)$, avec $x \geqslant 0$ et $x - 2 \leqslant 0$, donc $x^2 - 2x \leqslant 0$.

La proposition est vraie, sa négation est fausse.

Attention — la négation de « tous… » n'est pas « aucun… » ; celle de $<$ est $\geqslant$.

Cas 3 · Lettres et égalités

Réflexe — variable, inconnue ou paramètre ? identité (à démontrer) ou équation (à résoudre) ? Avec un paramètre, je

sépare les cas.

Exemple. Question type : « Résoudre selon les valeurs du paramètre ». Exemple : l'équation $ax + 2 = x$, d'inconnue x, où a est un réel.

On regroupe : $ax - x = -2$, soit $(a-1)x = -2$.
Si $a \neq 1$: une seule solution, $x = \dfrac{-2}{a-1}$.
Si $a = 1$: $0 \times x = -2$, impossible, aucune solution.

Attention — on ne divise par une expression du paramètre qu'après avoir traité le cas où elle est nulle.

Cas 4 · Contraposée, absurde, disjonction des cas

Réflexe — conclusion négative : absurde ; hypothèse peu maniable : contraposée ; situations différentes : disjonction des cas.

Exemple. Question type : « Démontrer par contraposée que… ». Exemple : pour tout entier n, si $7n$ est pair, alors n est pair.

Contraposée : « si n est impair, alors $7n$ est impair ».
Soit $n = 2k+1$: $7n = 14k + 7 = 2(7k+3) + 1$, impair.
La contraposée est vraie, donc l'implication l'est aussi.

Attention — partir de « n pair » pour arriver à « $7n$ pair » démontre la réciproque, pas l'implication.

Cas 5 · Produit cartésien

Réflexe — un couple est ordonné ; arbre ou tableau à double entrée, puis $\mathrm{Card(A \times B) = Card(A) \times Card(B)}$.

Exemple. Question type : « Combien de couples… ? ». Exemple : mots de deux lettres (avec répétition) écrits avec $E = \{\mathrm{a}\,;\mathrm{b}\,;\mathrm{c}\,;\mathrm{d}\,;\mathrm{e}\}$.

Un mot est un couple de lettres : l'ensemble des mots est E^2.
$\mathrm{Card}(E^2) = 5 \times 5 = 25$ mots ; « ab » et « ba » sont deux mots différents.

Attention — $(a\,;b) \neq (b\,;a)$; ne pas confondre $A \times B$ (des couples) et $A \cap B$ (des éléments).

Cas 6 · Lire une liste Python

Réflexe — tableau des valeurs de la variable de boucle, condition testée une à une, indices à partir de 0.

Exemple. Question type : « Que contient la liste ? ». Exemple : `[x % 5 for x in [12, 7, 20, 33]]`.

On calcule le reste de chaque élément dans la division par 5 : 12 donne 2, 7 donne 2, 20 donne 0, 33 donne 3.
La liste vaut `[2, 2, 0, 3]` ; son élément d'indice 2 est 0.

Attention — `range(a, b)` s'arrête à `b - 1` ; `L[len(L)]` provoque une erreur.

Les pièges

- Le « ou » mathématique est inclusif : « P ou Q » est vraie aussi quand P et Q sont vraies.
- Nier « et » donne « ou » : la négation de « $a > 0$ et $b > 0$ » est « $a \leqslant 0$ ou $b \leqslant 0$ ».
- Réciproque ($Q \Rightarrow P$) et contraposée (non $Q \Rightarrow$ non P) ne sont pas la même chose.
- Permuter « pour tout » et « il existe » change le sens de la phrase.
- Vérifier une propriété sur quelques valeurs (ou avec un programme) ne démontre pas un « pour tout ».

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).