

Devoir surveillé – Logique, raisonnement et vocabulaire ensembliste

Quantificateurs, connecteurs logiques, ensembles et méthodes de raisonnement — outils transversaux de la Spé Maths 1re

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques 1^{re}

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Intervalles et ensembles

(4 pts)

- a) a) On pose $K =]-8; 6]$ et $M = [1; 11[$. Déterminer $K \cap M$.
- b) b) Déterminer $K \cup M$.
- c) c) Déterminer le complémentaire de K dans $\mathbb{R}$.
- d) d) Écrire $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 49\}$ sous forme d'intervalle et dire, en justifiant, s'il est inclus dans $K \cup M$.

Exercice 2 – Quantificateurs

(4 pts)

- a) a) Écrire avec des quantificateurs : « tout entier naturel admet un entier naturel strictement plus grand que lui ». Cette proposition est-elle vraie ?
- b) b) Écrire la négation de « $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, n > x^2$ ».
- c) c) La proposition « $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 8x + 16 = 0$ » est-elle vraie ? Justifier.
- d) d) La proposition « $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 8x + 17 > 0$ » est-elle vraie ? Justifier.

Exercice 3 – Implication, réciproque, contraposée

(4 pts)

- a) a) Soit x un réel. L'implication $I : « x \geq 10 \Rightarrow x^2 \geq 100 »$ est-elle vraie ? Justifier.
- b) b) Énoncer la réciproque de I et dire si elle est vraie.
- c) c) Énoncer la contraposée de I et dire si elle est vraie.
- d) d) Compléter par « nécessaire » ou « suffisante » : « $x^2 \geq 100$ est une condition ... pour $x \geq 10$ » ; « $x \geq 10$ est une condition ... pour $x^2 \geq 100$ ».

Exercice 4 – Raisonnements

(4 pts)

- a) a) Montrer que la proposition « $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 + n + 17$ est premier » est fausse.
- b) b) Montrer par disjonction de cas que, pour tout entier naturel n , $n^3 - n$ est un multiple de 3.
- c) c) Montrer par contraposée : « si $3n + 4$ est impair, alors n est impair » ($n \in \mathbb{N}$).
- d) d) Un élève écrit pour c) : « je suppose n impair, $n = 2k + 1$, alors $3n + 4 = 6k + 7$ est impair, c'est démontré ». Expliquer l'erreur.

Exercice 5 – Listes Python*(4 pts)*

- a) a) On exécute : `L = [15, 5, 8, 21, 14]`, `T = []`, puis `for x in L: if x % 3 == 0: / T.append(x)`. Que contient `T` à la fin ?
- b) b) Que renvoient `L[4]`, `len(T)` et `L[5]` ?
- c) c) Écrire une liste en compréhension contenant les carrés des éléments de `L` strictement supérieurs à 10, et donner son contenu.
- d) d) La proposition « $\exists x \in L, x$ est un multiple de 7 » est-elle vraie ? Écrire un script Python (avec une boucle) qui affiche `True` si un multiple de 7 figure dans `L`, `False` sinon.

Bon courage !