

Corrigé et barème – Logique, raisonnement et vocabulaire ensembliste

Quantificateurs, connecteurs logiques, ensembles et méthodes de raisonnement — outils transversaux de la Spé Maths 1re

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques 1re

Exercice 1 – Intervalles et ensembles

(4 pts)

- a) Réels vérifiant $-8 < x \leq 6$ et $1 \leq x < 11$: $K \cap M = [1; 6]$ ($1 \in M$ et $1 \in K$; $6 \in K$ et $6 \in M$). (1)
- b) $K \cup M =]-8; 11[$ (-8 exclu par K , 11 exclu par M). (1)
- c) $\text{non}(-8 < x \leq 6) : x \leq -8$ ou $x > 6$, soit $\overline{K} =]-\infty; -8] \cup]6; +\infty[$. (1)
- d) $x^2 < 49 \Leftrightarrow -7 < x < 7$: intervalle $] -7; 7[$. Comme $-8 < -7$ et $7 < 11$, on a $] -7; 7[\subset] -8; 11[$: inclus. (1)

Repère — Le complémentaire retourne chaque crochet : une borne incluse devient exclue et inversement.

Exercice 2 – Quantificateurs

(4 pts)

- a) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, m > n$. Vraie : pour tout n , $m = n + 1$ convient. (1)
- b) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, n \leq x^2$ (on échange les quantificateurs dans l'ordre et on nie l'inégalité). (1)
- c) $x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$, nul pour $x = -4$: un réel convient, la proposition est vraie. (1)
- d) $x^2 + 8x + 17 = (x + 4)^2 + 1 \geq 1 > 0$ pour tout réel x : vraie. (1)

Le point clé — Un exemple prouve un « il existe » ; un « pour tout » demande un argument valable pour toutes les valeurs, ici la forme canonique.

Exercice 3 – Implication, réciproque, contraposée

(4 pts)

- a) Vraie : si $x \geq 10 > 0$, la fonction carré étant croissante sur $[0; +\infty[$, $x^2 \geq 10^2 = 100$. (1)
- b) « $x^2 \geq 100 \Rightarrow x \geq 10$ » : fausse, $x = -11$ donne $x^2 = 121 \geq 100$ et $-11 < 10$. (1)
- c) « $x^2 < 100 \Rightarrow x < 10$ » : vraie, car une contraposée a la même valeur de vérité que l'implication I . (1)
- d) $x^2 \geq 100$ est nécessaire (pas suffisante) pour $x \geq 10$; $x \geq 10$ est suffisante (pas nécessaire) pour $x^2 \geq 100$. (1)

Erreur fréquente — Élever au carré n'est pas une équivalence sur $\mathbb{R}$: le contre-exemple de la réciproque est toujours un négatif.

Exercice 4 – Raisonnements

(4 pts)

- a) $n = 16 : 16^2 + 16 + 17 = 256 + 33 = 289 = 17^2$, qui n'est pas premier. Un contre-exemple suffit : la proposition est fausse. (1)
- b) $n^3 - n = n(n - 1)(n + 1)$. Si $n = 3k$: n multiple de 3. Si $n = 3k + 1$: $n - 1 = 3k$. Si $n = 3k + 2$: $n + 1 = 3(k + 1)$. Dans chaque cas l'un des facteurs est multiple de 3, donc le produit aussi. (1)
- c) Contraposée : « n pair $\Rightarrow 3n + 4$ pair ». Si $n = 2k$, $3n + 4 = 6k + 4 = 2(3k + 2)$, pair. Donc l'implication est vraie. (1)
- d) Il a démontré la réciproque « n impair $\Rightarrow 3n + 4$ impair », qui ne prouve pas l'implication demandée. La contraposée part de « n pair » et conclut « $3n + 4$ pair ». (1)

Attention — Partir de la conclusion pour retrouver l'hypothèse démontre la réciproque, pas l'implication.

Exercice 5 – Listes Python*(4 pts)*

- a) On garde les multiples de 3 dans l'ordre : `T = [15, 21]`. (1)
- b) `L[4]` vaut 14 (cinquième élément, indices de 0 à 4) ; `len(T)` vaut 2 ; `L[5]` provoque une erreur (indice hors liste). (1)
- c) `[x**2 for x in L if x > 10]` renvoie `[225, 441, 196]` (pour 15, 21 et 14). (1)
- d) Vraie : $21 = 3 \times 7$ (et $14 = 2 \times 7$). Script : `trouve = False` / `for x in L:` / `if x % 7 == 0:` / `trouve = True` / `print(trouve)`. (1)

Astuce — Une boucle qui bascule un booléen à True dès qu'un élément convient est la traduction directe du quantificateur « il existe ».